THEORIE DER DREHUNG DER ERDE

VON

DR. L. DE BALL

DIREKTOR DER v. KUFFNER'SCHEN STERNWARTE.

(Mit 13 Textfiguren.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 31. OKTOBER 1907.

Die vorliegende Arbeit soll die Theorie der Drehung der Erde in einer gegenüber der üblichen Darstellung wesentlich vereinfachten und doch vom Standpunkte der Praxis aus völlig strengen Form geben. Die Erde wird dabei als ein starres Rotationsellipsoid aufgefaßt werden, dessen Trägheitsmomente in Bezug auf sämtliche im Äquator liegende und durch den Mittelpunkt gehende Achsen einander gleich sind. Eine Folge dieser Annahme ist, daß die jeweilige Schnittlinie des Äquators mit einer festen Fundamentalebene, und die durch den Mittelpunkt der Erde und in der Äquatorebene senkrecht zu dieser Schnittlinie gezogene Gerade als Hauptträgheitsachsen aufgefaßt und zu Koordinatenachsen gewählt werden können; die so getroffene Wahl der Achsen ist von großem Vorteil für die weiteren Untersuchungen.[1]

Bei der Berechnung der aus der Anziehung des Mondes stammenden Drehungsmomente in Bezug auf die Koordinatenachsen habe ich an Stelle der Länge und Breite des Mondes seine Länge in der Bahn und die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik eingeführt. Diese Substitution ermöglicht es, die in den Gleichungen auftretenden Produkte der trigonometrischen Funktionen der Länge und Breite des Mondes zunächst in Summen von sehr einfach gebauten Gliedern zu verwandeln, so zwar, daß man außer einem sofort erledigten, von dem Knoten und der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik abhängigen Gliede, nur mehr einen einzigen Ausdruck, nämlich den Sinus der doppelten Länge des Mondes in seiner Bahn in eine Reihe zu entwickeln hat. Die Ausdrücke für die Länge des Mondes in seiner Bahn und für den reziproken Wert des Radiusvektors des Mondes wurden der Delaunay'schen Theorie entlehnt, auf die periodischen Störungen des Knotens und der Neigung der Mondbahn ist Rücksicht genommen worden. Die Integration der Differentialgleichungen erfolgt auf dem Wege der sukzessiven Näherungen; jedoch führt bereits die zweite Näherung zur Kenntnis aller Glieder, deren Koeffizienten 0"002 erreichen.

Bei der Berechnung der numerischen Werte der in den Endformeln auftretenden Koeffizienten wurden die von der Pariser Konferenz angenommenen Werte der Präzessions- und Nutationskonstante zu Grunde gelegt; die der Theorie der Bewegung der Sonne zu entlehnenden Zahlenwerte sind nach den Newcomb'schen Sonnentafeln angesetzt worden. Als feste Fundamentalebene wurde die Ebene der

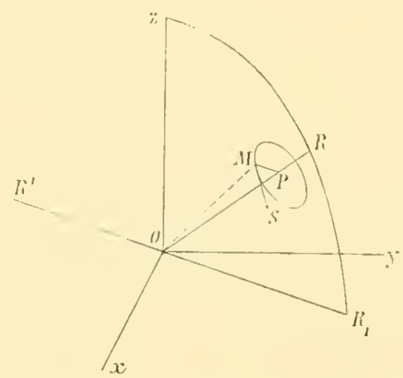
[1] Wie ich erst nachträglich bemerkt habe, hat schon Routh sich derselben Achsen bedient (Routh, Dynamics, part II, Art. 522).

Ekliptik für die Epoche 1850.0 gewählt; indessen sind auch alle Formeln entwickelt worden, deren man bedarf, wenn man die einer anderen Epoche zugehörige Ekliptik als Fundamentalebene zu betrachten wünscht.

In der Absicht, die Theorie der Drehung der Erde von Grund auf zu entwickeln, habe ich in den zwei ersten Artikeln und zum Teil im Anschluß an das durch die Eleganz der Darstellung ausgezeichnete Lehrbuch der analytischen Mechanik von Ph. Gilbert[1] einige Formeln abgeleitet, deren man im Verlauf der Untersuchungen bedarf. Der Hinweis auf das genannte Werk erscheint um so mehr geboten, als die von Gilbert gewählte Form, die der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt entsprechenden Euler'schen Gleichungen zu begründen, mir als Vorbild für die Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung sowohl der Achse des größten Trägheitsmomentes als auch der Rotationsachse der Erde gedient hat.

1. Um durch eine einfache Gerade nicht nur die Richtung der Rotationsachse sondern auch die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation eines Körpers darzustellen, trage man auf der Drehungsachse, von einem ihrer Punkte O aus, eine der Winkelgeschwindigkeit ω proportionale Strecke OR ab, und zwar in einem solchen Sinne, daß für einen Beobachter, dessen Kopf in R und dessen Füße in O sich

Fig. 1.



befinden, die Drehung von rechts nach links erfolgt; eine solche Drehung möge als positiv bezeichnet werden. Es seien x, y, z die Koordinaten und v_x, v_y, v_z die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes M des rotierenden Körpers, bezogen auf ein durch O gelegtes festes rechtwinkeliges Koordinatensystem; ferner gebe MS die Richtung der Geschwindigkeit v des Punktes M an, so daß also MS senkrecht zur Ebene MOR, folglich auch senkrecht zu OR und OM ist. Bezeichnet man demnach mit α, β, γ die Richtungswinkel von OR, so hat man die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{gathered} v_x \cos\alpha + v_y \cos\beta + v_z \cos\gamma = 0 \\ x\,v_x + y\,v_y + z\,v_z = 0 \end{gathered} .$$

Wenn nun f den Abstand MP des Punktes M von der Rotationsachse bedeutet, so ist

$$(2)\qquad v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 = \omega^2 f^2.$$

Aus den vorigen Gleichungen ergibt sich, wenn noch $OM = \delta$ gesetzt wird, so daß also

$$f = \delta \sin MOR$$

ist,

[1] Ph. Gilbert, Cours de mécanique analytique, 3me éd., Paris 1891 (Gauthier-Villars).

$$\frac{v_x}{z\cos\beta - y\cos\gamma} = \frac{v_y}{x\cos\gamma - z\cos\alpha} = \frac{v_z}{y\cos\alpha - x\cos\beta} =$$

$$= \pm \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{(z\cos\beta - y\cos\gamma)^2 + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)^2 + (y\cos\alpha - x\cos\beta)^2}} =$$

$$= \pm \frac{\omega f}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}} =$$

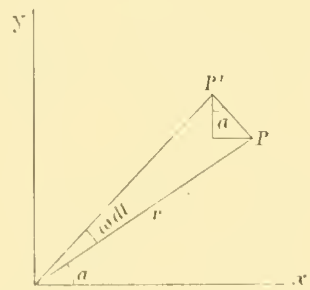
$$= \pm \frac{\omega f}{\sqrt{\delta^2 - \delta^2 \cos^2 MOR}} = \pm\,\omega.$$

Um zu bestimmen, welches der beiden Vorzeichen gewählt werden muß, betrachte man den Spezialfall, wo die Rotationsachse mit der z Achse zusammenfällt und demnach $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$ ist. Die vorigen Gleichungen geben dann

$$v_x = \mp\,\omega y, \qquad v_y = \pm\,\omega x.$$

Mit Hülfe von Fig. 2 ergibt sich aber ohne weiteres, daß, wenn der in der xy Ebene gelegene Punkt P in dem Zeitelement dt den kleinen Kreisbogen $PP' = r\,\omega\,dt$ beschreibt, die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes gleich

Fig. 2.



$$v_x = -\,\omega y, \qquad v_y = +\,\omega x$$

sind. Somit muß das obere Vorzeichen gewählt werden, und man erhält

$$\begin{aligned} v_x &= \omega\,(z\cos\beta - y\cos\gamma) \\ v_y &= \omega\,(x\cos\gamma - z\cos\alpha) \\ v_z &= \omega\,(y\cos\alpha - x\cos\beta). \end{aligned} \tag{3}$$

Die Komponenten $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ der Achse $OR = \omega$ in Bezug auf die Koordinatenachsen mögen der Reihe nach mit p, q, r bezeichnet werden; man hat dann

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 \tag{4}$$

und die Gleichungen (3) nehmen die Form an

$$\begin{aligned} v_x &= qz - ry \\ v_y &= rx - pz \\ v_z &= py - qx. \end{aligned} \tag{5}$$

Da p, q, r die Projektionen der Strecke OR auf die Koordinatenachsen darstellen und OR die Richtung der Rotationsachse des Körpers, die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation angibt, so kann man auch sagen: Wenn sich ein Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Gerade OR dreht, welche mit drei zu einander senkrechten Achsen Ox, Oy, Oz die Winkel α, β, γ bildet, so läßt sich diese Drehung durch drei andere um die genannten Achsen ersetzen und zwar sind die Winkelgeschwindigkeiten dieser Drehungen bezüglich gleich $\omega \cos \alpha$, $\omega \cos \beta$, $\omega \cos \gamma$. Hat eine dieser Drehungen, zum Beispiel $\omega \cos \alpha$ einen negativen Wert, so bedeutet das, daß die Drehung um die x-Achse, von deren positivem Ende aus betrachtet, von links nach rechts stattfindet; vom negativen Ende der x-Achse aus gesehen, würde eine solche Drehung von rechts nach links erfolgen. Einer Drehung $\omega \cos \alpha$ um die positive x-Achse ist also die Drehung $-\omega \cos \alpha$ um die negative x-Achse äquivalent.

2. Wenn – mit Bezug auf ein im Raume festes rechtwinkeliges Koordinatensystem – X, Y, Z die Komponenten der an einem Punkt von der Masse m und den Koordinaten x_1, y_1, z_1 wirkenden Kraft bedeuten, so lehrt das d'Alembert'sche Prinzip, daß für alle mit den Verbindungen eines Systems von Massenpunkten verträglichen Bewegungen $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ die Gleichung bestehen muß

$$\Sigma \left\{ \left(X - m \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) \delta x_1 + \left(Y - m \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) \delta y_1 + \left(Z - m \frac{d^2 z_1}{dt^2} \right) \delta z_1 \right\} = 0. \tag{6}$$

Unter dem System von Massenpunkten soll nun ein fester Körper verstanden werden. Die allgemeinste Bewegung des Systems setzt sich dann zusammen aus einer fortschreitenden und aus einer drehenden Bewegung. Bezeichnet man die Geschwindigkeitskomponenten der fortschreitenden Bewegung mit u, v, w und die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit mit p, q, r, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (5)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u + qz_1 - ry_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= v + rx_1 - pz_1 \\ \frac{dz_1}{dt} &= w + py_1 - qx_1; \end{aligned} \tag{7}$$

ferner ist

$$\delta x_1 = \frac{dx_1}{dt} \delta t, \qquad \delta y_1 = \frac{dy_1}{dt} \delta t, \qquad \delta z_1 = \frac{dz_1}{dt} \delta t. \tag{8}$$

Die aus den Gleichungen (8) und (7) folgenden Werte von $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ sind nun in (6) zu substituieren. Damit die so gewonnene neue Gleichung für beliebige Werte von u, v, w, p, q, r erfüllt sei, müssen die Koeffizienten dieser sechs Variabelen jeder für sich verschwinden; man erhält demnach

$$\Sigma m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma X, \qquad \Sigma m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad \Sigma m \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma Z \tag{9}$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma m \left(y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) &= \Sigma (y_1 Z - z_1 Y) \\ \Sigma m \left(z_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - x_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} \right) &= \Sigma (z_1 X - x_1 Z) \\ \Sigma m \left(x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) &= \Sigma (x_1 Y - y_1 X). \end{aligned} \tag{10}$$

Wählt man den Schwerpunkt des Körpers zum Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems, dessen Achsen den vorhin benutzten festen Achsen stets parallel bleiben sollen, so hat man, wenn $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Koordinaten des Schwerpunktes in Bezug auf das alte Koordinatensystem, und x, y, z die Koordinaten des Massenelementes m in Bezug auf das neue System bedeuten,

$$x_1 = \bar{x} + x, \qquad y_1 = \bar{y} + y, \qquad z_1 = \bar{z} + z \tag{11}$$

Ferner ist

$$\Sigma\, m\, x = \Sigma\, m\, y = \Sigma\, m\, z = 0,$$

folglich auch

$$\Sigma\, m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma\, m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma\, m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Durch Substitution von (11) in (9) ergibt sich also, wenn $\Sigma\, m = M$ gesetzt wird,

$$M \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \Sigma\, X, \qquad M \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = \Sigma\, Y, \qquad M \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = \Sigma\, Z, \tag{12}$$

das heißt: Die Bewegung des Schwerpunktes eines irgend welchen Kräften unterworfenen festen Körpers ist dieselbe, als wenn die ganze Masse des Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert wäre und alle Kräfte direkt an letzterem wirkten. Substituiert man die Werte (11) von x_1, y_1, z_1 in die Gleichungen (10), so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (12)

$$\begin{aligned} \Sigma\, m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \Sigma\, (y\, Z - z\, Y) \\ \Sigma\, m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \Sigma\, (z\, X - x\, Z) \\ \Sigma\, m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \Sigma\, (x\, Y - y\, X). \end{aligned} \tag{13}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form wie die Gleichungen (10); dem Inhalte nach besteht aber der Unterschied, daß die Gleichungen (10) für ein im Raume festes, die Gleichungen (13) dagegen für ein im Raume bewegliches Koordinatensystem gelten, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt ist, und dessen Achsen eine konstante Richtung haben. Die Bewegung eines festen Körpers um den beweglichen Schwerpunkt, welche naturgemäß nur in einer Drehung bestehen kann, ist also dieselbe als wenn der Schwerpunkt fest wäre.

Unter Einführung der Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z kann man den Gleichungen (13) die Form geben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma\, m\, (y\, v_z - z\, v_y) &= \Sigma\, (y\, Z - z\, Y) \\ \frac{d}{dt} \Sigma\, m\, (z\, v_x - x\, v_z) &= \Sigma\, (z\, X - x\, Z) \\ \frac{d}{dt} \Sigma\, m\, (x\, v_y - y\, v_x) &= \Sigma\, (x\, Y - y\, X). \end{aligned} \tag{14}$$

Es lassen sich nun $\Sigma\, m\, (y\, v_z - z\, v_y), \ldots, \Sigma\, m\, (x\, v_y - y\, v_x)$ als die Koordinaten K_x, K_y, K_z eines Punktes K, oder, wenn O den zum Anfangspunkt der Koordinaten gewählten Schwerpunkt des Körpers bezeichnet, als die Projektionen der Strecke OK auf die Koordinatenachsen auffassen; man hat also

(15) $$K_x = \Sigma\, m\,(y\,v_z - z\,v_y), \qquad K_y = \Sigma\, m\,(z\,v_x - x\,v_z), \qquad K_z = \Sigma\, m\,(x\,v_y - y\,v_x).$$

Die Strecke OK wird im Folgenden die Impulsachse des Körpers genannt werden. Es lassen sich aber auch die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (14) als Koordinaten eines Punktes G definieren; werden diese mit G_x, G_y, G_z bezeichnet, so ist

(16) $$G_x = \Sigma\,(y\,Z - z\,Y), \qquad G_y = \Sigma\,(z\,X - x\,Z), \qquad G_z = \Sigma\,(x\,Y - y\,X).$$

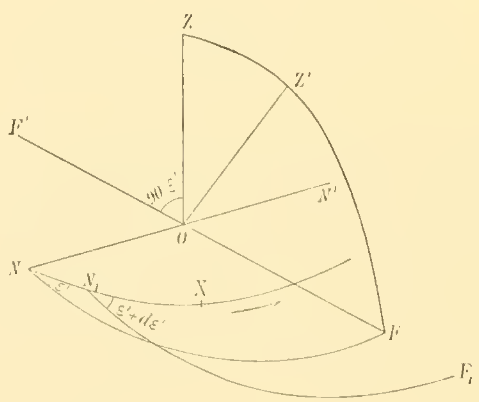
Die Strecke OG soll die Achse des resultierenden Kräftepaares der äußeren Kräfte in Bezug auf den Schwerpunkt O genannt werden. Die Gleichungen (14) nehmen jetzt die Gestalt an

(17) $$\frac{d\,K_x}{dt} = G_x, \quad \frac{d\,K_y}{dt} = G_y, \quad \frac{d\,K_z}{dt} = G_z.$$

Die drei letzten Gleichungen sagen aus: Wenn man für einen in Bewegung begriffenen festen Körper in jedem Augenblick die Impulsachse OK und die Achse OG des resultierenden Kräftepaares der äußeren Kräfte in Bezug auf den Schwerpunkt O bestimmt, so ist OG gleich und parallel der Geschwindigkeit des Punktes K.

3. Bei der Anwendung der vorigen Formeln auf die Erde machen wir die Annahme, daß letztere ein aus unendlich dünnen ellipsoidalen, homogenen Schichten gebildetes abgeplattetes Rotationsellipsoid sei. Der Mittelpunkt dieses Ellipsoids, welcher also mit dem Schwerpunkt der Erde gleichbedeutend ist, werde zum Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems X', Y', Z' gewählt, und zwar soll die Z'-Achse mit der kleinen Achse der Erde zusammenfallen. Um die Achsen X' und Y' zu definieren, setze man zunächst fest, daß die in Artikel 2 benutzte, durch den Schwerpunkt gelegte XY-Ebene die einer bestimmten, im übrigen aber beliebig zu wählenden Epoche $t = 0$ entsprechende Ebene der Ekliptik sei (NOX in Fig. 3), und daß die X-Achse durch das Frühlingsäquinox dieser Epoche hindurch gehe. Die zur Z'-Achse senkrechte Ebene NOF

Fig. 3.



das heißt die Ebene des terrestrischen Äquators zur Zeit t, schneide die feste Ekliptik NOX in der Linie NON' und werde selbst durch die Ebene ZOZ' in der Linie FOF' geschnitten; es stehen dann die Linien OZ', NON', FOF' senkrecht zu einander. Bedeutet nun N den niedersteigenden Knoten des terrestrischen Äquators auf der festen Ekliptik, und bezeichnet man mit F den im Sinne der Erdrotation um 90° von N entfernten Punkt des Äquators oder auch den Durchschnittspunkt des Äquators mit dem über Z' hinaus verlängerten Bogen ZZ', so soll zur Zeit t ON als X'- und OF als Y'-Achse gewählt werden. Die Länge des Punktes N, gezählt von X aus, werde ψ genannt; in Fig. 3 ist somit der Bogen $NX = 360° - \psi$. Der Winkel FNX oder die Neigung des terrestrischen Äquators gegen die feste Ekliptik möge mit ε' bezeichnet werden. In dem Zeitelemente dt rücke der Äquator von NF nach N_1F_1, wobei $N_1F_1 = NF = 90°$ sein soll; zur Zeit $t + dt$ ist dann ON_1 die X'- und OF_1 die Y'-Achse. Bezeichnet man die Länge von N_1

gezählt von X aus mit $\psi + d\psi$, so ist der Bogen $NN_1 = d\psi$; der Winkel F_1N_1X werde gleich $\varepsilon' + d\varepsilon'$ gesetzt. Die der Zeit t entsprechenden Koordinatenachsen ON und OF lassen sich nun dadurch in ihre neuen Lagen ON_1 und OF_1 zur Zeit $t + dt$ überführen, daß man sie um die Achse OZ um den Winkel $d\psi$ und um die Achse ON' um den Winkel $d\varepsilon'$ dreht; sind $d\psi$ und $d\varepsilon'$ positiv, so erfolgt die Drehung um OZ und ON' in positivem Sinne, das heißt von Z beziehungsweise N' aus gesehen von rechts nach links. Man trage jetzt auf der Achse OZ eine der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ proportionale Strecke ab; die Projektionen derselben auf die Achsen OF' und OZ' sind bezüglich gleich $\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$ und $\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$. Nach Artikel 1 läßt sich somit die Drehung um OZ durch eine Drehung um OF' mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, verbunden mit einer Drehung um OZ' mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$ ersetzen. Da aber eine Drehung um OF', deren Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$ ist, dieselbe Bedeutung hat wie eine Drehung um OF mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, und da eine analoge Bemerkung für die Drehung $d\varepsilon'$ um ON' zutrifft, so folgt, daß sich die Achsen X' und Y' dadurch aus ihrer Lage zur Zeit t in diejenige zur Zeit $t + dt$ überführen lassen, daß man dieselben 1) um die Achse ON mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\varepsilon'}{dt}$, 2) um die Achse OF mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, und 3) um die Achse OZ' mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$ dreht. Sind nun die Achsen X' und Y' in ihrer Lage zur Zeit $t + dt$ angelangt, so ist dasselbe mit der Z'-Achse der Fall; damit aber auch jeder Meridian der Erde aus der Lage, die er zur Zeit t hat, in diejenige gelange, welche er zur Zeit $t + dt$ einnimmt, lasse man die Erde außerdem noch um die Z'-Achse eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ ausführen, wo φ den von $Z'N$ aus im Sinne der Erdrotation gezählten Winkel zwischen $Z'N$ und einem beliebigen Erdmeridian bedeutet. Es ist jedoch wesentlich zu bemerken, daß die Achsen X' und Y' an dieser Drehung nicht teilnehmen sollen. Zeigt nun OR,[1] nach der in Artikel 1 gegebenen Definition, nicht nur die Richtung der Rotationsachse der Erde, sondern auch die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation der Erde an, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden, daß OR die Resultante aus folgenden drei auf die Richtungen ON, OF, OZ', das heißt also auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t bezogenen Komponenten ist:

$$p = -\frac{d\varepsilon'}{dt}, \qquad q = -\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon', \qquad r = \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon' + \frac{d\varphi}{dt}. \tag{18}$$

Den Gleichungen (5) zufolge sind aber die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes x', y', z' der Erde, bezogen auf die Achsen X' Y' Z' in ihrer Lage zur Zeit t

$$v_{x'} = qz' - ry', \qquad v_{y'} = rx' - pz', \qquad v_{z'} = py' - qx'. \tag{5^a}$$

Führt man die Werte (5ᵃ) in die den Gleichungen (15) entsprechenden Relationen

$$K_{x'} = \Sigma m\,(y'v_{z'} - z'v_{y'}), \qquad K_{y'} = \Sigma m\,(z'v_{x'} - x'v_{z'}) \qquad K_{z'} = \Sigma m\,(x'v_{y'} - y'v_{x'}) \tag{15^a}$$

ein, so erhält man die Projektionen der Impulsachse OK der Erde, bezogen auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t. Da jedoch die Erde als ein aus homogenen Schichten gebildetes Rotationsellipsoid

[1] In Fig. 3 nicht gezeichnet.

aufgefaßt wird, dessen Drehungsachse die Z'-Achse sein soll, so entspricht jedem positiven Gliede der Summen $\Sigma m x' y'$, $\Sigma m y' z'$, $\Sigma m x' z'$ ein gleich großes negatives; diese Summen sind also gleich 0. Ferner folgt noch $\Sigma m y'^2 = \Sigma m x'^2$, und hieraus $\Sigma m (y'^2 + z'^2) = \Sigma m (x'^2 + z'^2)$. Somit erhält man durch die Substitution von (5^a) in (15^a), wenn noch

$$\Sigma m (y'^2 + z'^2) = \Sigma m (x'^2 + z'^2) = A, \qquad 2 \Sigma m x'^2 = C$$

gesetzt wird,

$$K_{x'} = A p, \qquad K_{y'} = A q, \qquad K_{z'} = C r,$$

wo p, q, r durch die Gleichungen (18) bestimmt sind.

Da nun Ap, Aq, Cr die Koordinaten des Punktes K in Bezug auf die beweglichen Achsen X', Y', Z' bedeuten, und A und C konstant sind, so werden die relativen Geschwindigkeitskomponenten von K bezogen auf die genannten Achsen

$$A \frac{dp}{dt}, \qquad A \frac{dq}{dt}, \qquad C \frac{dr}{dt}.$$

In den Gleichungen (17) beziehen sich die Komponenten der Geschwindigkeit von K auf Achsen von konstanter Richtung; diese Geschwindigkeit ist aber bekanntlich die Resultierende aus der relativen Geschwindigkeit des Punktes K, bezogen auf die beweglichen Achsen X', Y', Z', und der Geschwindigkeit g, welche der Punkt K haben würde, wenn er fest mit den beweglichen Achsen verbunden wäre. Unserer Annahme nach besteht die Bewegung dieser Achsen in einer Drehung, deren Komponenten, bezogen auf die Lage der Achsen X', Y', Z' zur Zeit t, bezüglich gleich $-\frac{d\varepsilon'}{dt}$, $-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, $\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$ sind. Wenn also in den Gleichungen (5^a) an Stelle von p, q, r der Reihe nach die eben angegebenen Komponenten, und an Stelle von x', y', z' die Koordinaten Ap, Aq, Cr des Punktes K gesetzt werden, so erhält man für die Komponenten der Geschwindigkeit g

$$g_{x'} = - Cr \frac{d\psi}{dt} \sin\varepsilon' - A q \frac{d\psi}{dt} \cos\varepsilon'$$

$$g_{y'} = A p \frac{d\psi}{dt} \cos\varepsilon' + C r \frac{d\varepsilon'}{dt}$$

$$g_{z'} = - A q \frac{d\varepsilon'}{dt} + A p \frac{d\psi}{dt} \sin\varepsilon'.$$

Wie vorhin bemerkt wurde, stellen die Summen $g_{x'} + A\frac{dp}{dt}$, $g_{y'} + A\frac{dq}{dt}$, $g_{z'} + C\frac{dr}{dt}$ die in den Gleichungen (17) vorkommenden Geschwindigkeitskomponenten $\frac{dK_{x'}}{dt}$, $\frac{dK_{y'}}{dt}$, $\frac{dK_{z'}}{dt}$ dar, und zwar bezogen auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t. Werden nun in den Ausdrücken für $g_{x'}$, $g_{y'}$, $g_{z'}$ sowie in $A\frac{dp}{dt}$ und $A\frac{dq}{dt}$ an Stelle von p und q ihre Werte aus (18) substituiert, r und $\frac{dr}{dt}$ aber beibehalten, und bezeichnet man die nach den Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t genommenen Projektionen der Achse OG des resultierenden Kräftepaares der äußeren Kräfte mit L, M, N, so folgt aus (17)

$$- Cr \sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt} - A \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) + A \sin\varepsilon' \cos\varepsilon' \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = L$$

(19)
$$Cr \frac{d\varepsilon'}{dt} - A \frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt}\right) - A \cos\varepsilon' \frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt} = M$$

$$C\frac{dr}{dt} = N.$$

4. Den Gleichungen (16) gemäß ist, wenn X', Y', Z' die nach den Achsen X', Y', Z' genommenen Kraftkomponenten bedeuten,

$$L = G_{x'} = \Sigma\,(y' Z' - z' Y').$$

Dieser Ausdruck und die entsprechenden für M und N sollen jetzt weiter entwickelt werden, und zwar unter der Voraussetzung, daß unter den auf die Erde wirkenden Kräften die Anziehung der Sonne und des Mondes zu verstehen ist. Jeder dieser beiden Himmelskörper soll als aus homogenen konzentrischen Kugelschichten bestehend angesehen werden, so daß also die von Sonne und Mond auf ein Erdelement ausgeübte Anziehung dieselbe ist, als wenn ihre Massen in den bezüglichen Mittelpunkten vereinigt wären. Man betrachte zunächst nur einen anziehenden Körper mit der Masse M_1, und bezeichne mit x_1', y_1', z_1' die Koordinaten seines Mittelpunktes bezogen auf die beweglichen Achsen X', Y', Z'. Ist m die Masse eines Erdelementes mit den Koordinaten x', y', z', und setzt man

$$(x_1' - x')^2 + (y_1' - y')^2 + (z_1' - z')^2 = u^2,$$

so hat man für die nach den Achsen Y' und Z' in ihrer Lage zur Zeit t genommenen Komponenten der seitens M_1 auf m ausgeübten Anziehung (wenn noch k^2 die Gauß'sche Konstante bedeutet)

$$Y' = k^2 \frac{M_1 m}{u^3} (y_1' - y'), \qquad Z' = k^2 \frac{M_1 m}{u^3} (z_1' - z').$$

Diese Werte sind in

$$\begin{aligned} L &= \Sigma\,(y' Z' - z' Y') \\ &= y_1' \Sigma Z' - z_1' \Sigma Y' + \Sigma Y' (z_1' - z') - \Sigma Z' (y_1' - y') \end{aligned}$$

zu substituieren. Verfährt man in ähnlicher Weise mit M und N, und drückt dann X', Y', Z' durch die partiellen Differentialquotienten der Funktion

$$V = k^2 M_1 \Sigma \frac{m}{u} \tag{20}$$

aus, so folgt

$$\begin{aligned} L &= z_1' \frac{\partial V}{\partial y_1'} - y_1' \frac{\partial V}{\partial z_1'}, \\ M &= x_1' \frac{\partial V}{\partial z_1'} - z_1' \frac{\partial V}{\partial x_1'}, \\ N &= y_1' \frac{\partial V}{\partial x_1'} - x_1' \frac{\partial V}{\partial y_1'}. \end{aligned} \tag{21}$$

Um V zu berechnen, berücksichtige man, daß, wenn r_1' und r' die Entfernungen des Schwerpunktes der anziehenden Masse M_1 beziehungsweise eines Erdelementes vom Mittelpunkte der Erde bedeuten,

$$u^2 = r_1'^2 + r'^2 - 2\,(x' x_1' + y' y_1' + z' z_1')$$

ist; man hat somit

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r_1'} \left\{ 1 - \frac{2}{r_1'^2} (x' x_1' + y' y_1' + z' z_1') + \frac{r'^2}{r_1'^2} \right\}^{-1/2}.$$

Dieser Ausdruck ist nach dem binomischen Satze zu entwickeln und in (20) zu substituieren. In Artikel 3 wurde bereits gezeigt, daß wegen unserer Annahme über die Beschaffenheit der Erde und mit Rücksicht auf die Wahl der Koordinatenachsen die Summen $\Sigma\, m x' y'$, $\Sigma\, m x' z'$, $\Sigma\, m y' z'$ jede für sich verschwinden müssen. Dieselbe Schlußweise wie die damals angewandte führt zu dem Resultat, daß auch

jede der Summen $\Sigma m x'$, $\Sigma m y'$, $\Sigma m z'$, $\Sigma m\ (x' x_1' + y' y_1' + z' z_1')^3$, $\Sigma m r'^2 (x' x_1' + y' y_1' + z' z_1')$ gleich 0 ist. Setzt man also die Masse der Erde $\Sigma m = E$ und berücksichtigt die Gleichung $\Sigma m x'^2 = \Sigma m y'^2$, so erhält man unter Vernachlässigung der Glieder vierter Ordnung in Bezug auf die Koordinaten eines Erdelementes

$$V = k^2 M_1 \left\{ \frac{E}{r_1'} - \frac{\Sigma m r'^2}{2 r_1'^3} + \frac{3}{2 r_1'^5} [(x_1'^2 + y_1'^2) \Sigma m x'^2 + z_1'^2 \Sigma m z'^2] \right\}$$

$$= k^2 M_1 \left\{ \frac{E}{r_1'} - \frac{\Sigma m r'^2}{2 r_1'^3} + \frac{3}{2 r_1'^3} \left[\Sigma m x'^2 - \frac{z_1'^2}{r_1'^2} (\Sigma m x'^2 - \Sigma m z'^2) \right] \right\}.$$

Nun ist

$$\Sigma m r'^2 = 2 \Sigma m x'^2 + \Sigma m z'^2,$$

$$\Sigma m (x'^2 + z'^2) = A, \qquad 2 \Sigma m x'^2 = C.$$

Somit wird

$$V = k^2 M_1 \left\{ \frac{E}{r_1'} + \frac{(C - A)}{2 r_1'^3} \left(1 - 3 \frac{z_1'^2}{r_1'^2} \right) \right\}. \tag{22}$$

Da aber die Drehung der Achsen X', Y', Z' ohne Einfluß auf die Entfernungen r' und r_1' ist, so ergibt sich aus (21) und (22)

$$\begin{aligned} L &= 3 k^2 M_1 \left(\frac{C - A}{r_1'^3} \right) \frac{y_1' z_1'}{r_1'^2} \\ M &= - 3 k^2 M_1 \left(\frac{C - A}{r_1'^3} \right) \frac{x_1' z_1'}{r_1'^2} \\ N &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Da $N = 0$ ist, so folgt aus der dritten der Gleichungen (19), wenn mit n eine Konstante bezeichnet wird,

$$r = n; \tag{24}$$

somit lauten die beiden ersten Gleichungen (19)

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon' \frac{d\psi}{dt} &= - \frac{L}{Cn} - \frac{A}{Cn} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varepsilon'}{dt} \right) + \frac{A}{Cn} \sin \varepsilon' \cos \varepsilon' \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{M}{Cn} + \frac{A}{Cn} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon' \frac{d\psi}{dt} \right) + \frac{A}{Cn} \cos \varepsilon' \frac{d\psi}{dt} \frac{d\varepsilon'}{dt}. \end{aligned} \tag{25}$$

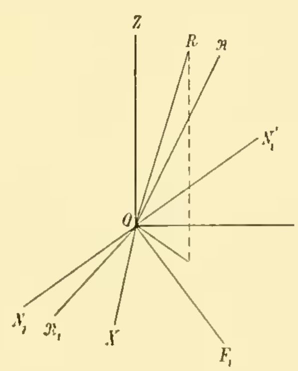
Die Gleichungen (23) geben die Werte von L und M für den Fall, daß die Erde nur von einem Körper angezogen wird. Indem nun die Bewegung der Erdachse mit Berücksichtigung der durch die Sonne und den Mond ausgeübten Anziehung abgeleitet werden soll, mögen die für diese Himmelskörper gültigen Werte von M_1, x_1', . . r_1' durch $M_\odot$, $x_\odot$, ... $r_\odot$ beziehungsweise M_c, x_c. . . r_c bezeichnet werden. Wenn ferner in Hinsicht auf die in den Sonnen- und Mondtafeln angewandten Einheiten von r_c beziehungsweise $r_\odot$ die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde H und die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne Δ eingeführt werden, so erhält man für die in den Gleichungen (25) zu benutzenden Ausdrücke von L und M

$$(25^a)\quad \begin{aligned} L &= 3\,k^2 M_c \frac{C-A}{H^3}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \frac{y_c\, z_c}{r_c^2} + 3\,k^2 M_\odot \frac{C-A}{\Delta^3}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \frac{y_\odot\, z_\odot}{r_\odot^2} \\ M &= -\,3\,k^2 M_c \frac{C-A}{H^3}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \frac{x_c\, z_c}{r_c^2} - 3\,k^2 M_\odot \frac{C-A}{\Delta^3}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \frac{x_\odot\, z_\odot}{r_\odot^2}. \end{aligned}$$

5. Aus den Beobachtungen hat sich ergeben, daß die Rotationsachse der Erde zwar sehr nahe, aber nicht völlig mit der kleinen Achse des Erdellipsoids zusammenfällt. Da die Gleichungen (25) die Differentialgleichungen der Bewegung der kleinen Achse des Erdellipsoids darstellen, die Beobachtungen sich jedoch auf die Rotationsachse beziehen, so müssen nun die der letzteren entsprechenden Differentialgleichungen abgeleitet werden. Es möge in Fig. 4 der Vektor $OR = \omega$ die Richtung der Rotationsachse der Erde zur Zeit t, die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation angeben; $OXYZ$ sei das durch den Schwerpunkt der Erde gelegte, sich selbst stets parallel bleibende Koordinatensystem, und zwar soll wie früher als XY-Ebene die Ebene der Ekliptik zur Zeit $t = 0$ gewählt werden und die X-Achse durch das der Epoche $t = 0$ entsprechende Frühlingsäquinox hindurchgehen.

Die senkrecht zu OR gelegte Ebene, welche der instantane Äquator genannt werden soll, schneide die XY-Ebene nach der Linie $N_1 O N_1'$ und werde durch die Ebene ZOR in OF_1 geschnitten; die Linien

Fig. 4.



ON_1', OF_1 und OR stellen somit drei zu einander senkrechte Achsen dar. Im Folgenden wird die von OX aus in der Richtung nach OY gerechnete Länge des niedersteigenden Knotens N_1 des instantanen Äquators auf der festen Ekliptik mit ψ_1 und der Winkel ZOR mit ε_1' bezeichnet werden. Zur Zeit $t + dt$ sei $O\mathfrak{R} = \omega + d\omega$ die Rotationsachse der Erde und $O\mathfrak{R}_1$ die Schnittlinie der zu $O\mathfrak{R}$ senkrechten Ebene mit der XY-Ebene; die von X aus gerechnete Länge von $\mathfrak{R}_1$ möge mit $\psi_1 + d\psi_1$ und der Winkel $ZO\mathfrak{R}$ mit $\varepsilon_1' + d\varepsilon_1'$ bezeichnet werden. Der Punkt R rückt also in dem Zeitelement dt von R nach $\mathfrak{R}$. Diese Ortsveränderung läßt sich dadurch bewirken, daß man den Punkt R 1) um die Z-Achse um den Winkel $d\psi_1$ 2) um die Achse ON_1' um den Winkel $d\varepsilon_1'$ dreht und 3) in der Richtung OR um $d\omega$ verschiebt. Da die Projektion von OR auf die xy-Ebene gleich $\omega \sin \varepsilon_1'$ ist, so beschreibt R bei der Drehung um die Z-Achse den Bogen $\omega \sin \varepsilon_1'\, d\psi_1$, und zwar ist die Richtung der Bewegung parallel zu ON_1'; bezogen auf die ON_1' entgegengesetzte Richtung ON_1 ist also die Geschwindigkeitskomponente von R gleich $-\omega \sin \varepsilon_1' \frac{d\psi_1}{dt}$. Bei der Drehung um die Achse ON_1' bewegt sich R parallel zu der Richtung OF_1 um den Bogen $\omega\, d\varepsilon_1'$; die Geschwindigkeitskomponente von R bezogen auf OF_1 ist also $\omega \frac{d\varepsilon_1'}{dt}$.

Die Gleichungen (18) geben die Koordinaten von R in Beziehung auf die in Artikel 3 näher definierten beweglichen Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t. Ersetzt man in diesen Gleichungen die Buchstaben p, q, r durch x', y', z', so folgt mit Rücksicht auf (24)

$$(a)\qquad x' = -\frac{d\varepsilon'}{dt}, \qquad y' = -\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon', \qquad z' = n.$$

Die relativen Geschwindigkeitskomponenten von R sind demnach

$$(b)\qquad -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right), \qquad -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'\right), \qquad 0.$$

Nach p. 395 (Zeilen 12 bis 16) besteht die Bewegung der Achsen X', Y', Z' in einer Drehung deren Komponenten, genommen nach eben diesen Achsen in ihrer Lage zur Zeit t, durch die Gleichungen bestimmt sind

$$(c)\qquad p = -\frac{d\varepsilon'}{dt}, \qquad q = -\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon', \qquad r = \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'.$$

Denkt man sich den Punkt R fest mit den beweglichen Achsen verbunden, so ergeben sich seine bei der Drehung dieser Achsen erlangten Geschwindigkeitskomponenten $\gamma_{x'}$, $\gamma_{y'}$, $\gamma_{z'}$, indem man in den Formeln (5^a) (p. 7) statt x', y', z' die Werte (a) und statt p, q, r die Werte (c) substituiert; man erhält so

$$(d)\qquad \begin{aligned} \gamma_{x'} &= -n\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon' + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\sin\varepsilon'\cos\varepsilon' \\ \gamma_{y'} &= -\frac{d\varepsilon'}{dt}\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon' + n\frac{d\varepsilon'}{dt} \\ \gamma_{z'} &= 0. \end{aligned}$$

Die Summen der einander entsprechenden Gleichungen (b) und (d), nämlich

$$\gamma_{x'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right), \qquad \gamma_{y'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'\right), \qquad 0$$

geben nach einem schon früher benutzten Satze die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes R bezogen auf die Lage der Achsen X', Y' und Z' zur Zeit t an. Die Achsen X' und Y' fallen mit den in Fig. 3 mit ON und OF bezeichneten Richtungen zusammen; den Beobachtungen zufolge bilden aber diese Richtungen einen so kleinen Winkel mit den in Fig. 4 mit ON_1 und OF_1 bezeichneten, daß man die Komponenten $\gamma_{x'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$, $\gamma_{y'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'\right)$ auch als auf ON_1 und OF_1 bezogen annehmen kann. Da nun früher (p. 11) für die Geschwindigkeitskomponenten von R in Bezug auf ON_1 und OF_1 die Werte $-\omega\sin\varepsilon_1'\frac{d\psi_1}{dt}$ und $\omega\frac{d\varepsilon_1'}{dt}$ gefunden wurden, so erhält man durch Gleichstellung der einander entsprechenden Ausdrücke

$$-\omega\sin\varepsilon_1'\frac{d\psi_1}{dt} = -n\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt} + \sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$$

$$\omega\frac{d\varepsilon_1'}{dt} = n\frac{d\varepsilon'}{dt} - \cos\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dt}\frac{d\psi}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right).$$

Den Gleichungen (18) und (24) zufolge ist

$$\omega = OR = \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2 + \left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + n^2};$$

da aber $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ und $\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt}$ sehr klein gegenüber n sind, so kann man in den vorigen Gleichungen $\omega = n$ setzen. Substituiert man ferner noch an Stelle von $\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ ihre Werte aus (25), so folgt

$$(26)\qquad \begin{aligned} \sin\varepsilon_1' \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{L}{Cn} + \frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \\ \frac{d\varepsilon_1'}{dt} &= \frac{M}{Cn} - \frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\cos\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt} \end{aligned}$$

Die für die Rotationsachse gültigen Gleichungen (26) unterscheiden sich wesentlich von den der kleinen Achse des Erdellipsoids entsprechenden Gleichungen (25); während nämlich in (25) die Glieder zweiter Ordnung $\frac{A}{Cn}$ als Faktor enthalten, ist dieser in (26) nur mehr $\frac{C-A}{Cn}$. Da aber $\frac{C-A}{C}$ sehr klein ist, so kann man in den Gleichungen (26) die Glieder zweiter Ordnung zunächst vernachlässigen und erhält dann

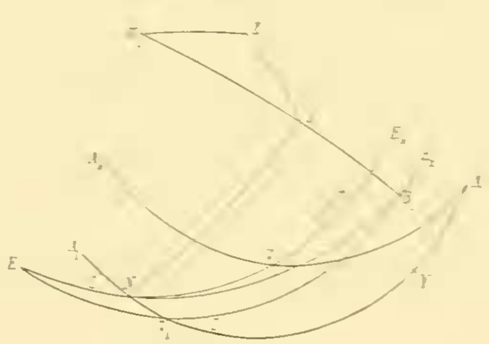
$$(26^a)\qquad \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{L}{Cn\sin\varepsilon'_1} \\ \frac{d\varepsilon'_1}{dt} &= \frac{M}{Cn} \end{aligned}$$

Führt man in diese Gleichungen die in (25^a) gegebenen Ausdrücke für L und M ein, und setzt zur Vereinfachung ψ und ε' an Stelle von ψ_1 und ε'_1, so ergibt sich

$$(27)\qquad \begin{aligned} -\frac{d\psi}{dt} &= \frac{3k^2M_{☾}}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{H}{r_{☾}}\right)^3\frac{y_{☾}z_{☾}}{r_{☾}^2\sin\varepsilon'} + \frac{3k^2M_{\odot}}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{\Delta}{r_{\odot}}\right)^3\frac{y_{\odot}z_{\odot}}{r_{\odot}^2\sin\varepsilon'} \\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= -\frac{3k^2M_{☾}}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{H}{r_{☾}}\right)^3\frac{x_{☾}z_{☾}}{r_{☾}^2} - \frac{3k^2M_{\odot}}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{\Delta}{r_{\odot}}\right)^3\frac{x_{\odot}z_{\odot}}{r_{\odot}^2}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Koordinaten der Sonne und des Mondes müssen den Theorien dieser beiden Himmelskörper oder den bezüglichen Tafeln entlehnt werden; da aber die weiterhin zur Anwendung kom-

Fig. 5.



menden Theorien direkt nur die Polarkoordinaten von Sonne und Mond geben, so erscheint es angezeigt die Gleichungen (27) dementsprechend umzuformen. Es sei EE_0 die feste, EE_1 die bewegliche Ekliptik, AA_0 der feste, AA_1 der bewegliche Äquator; der Pol der beweglichen Ekliptik werde mit Π_1, der Pol des beweglichen Äquators mit Z' bezeichnet; endlich möge S den Ort des Mondes und $\Pi_1 SB_1$ den Breiten-

kreis von S bezogen auf die bewegliche Ekliptik vorstellen. Setzt man die Länge des Mondes $\Upsilon_1 B_1 = l_c$ und seine Breite $B_1 S = b_c$, setzt man ferner die Schiefe der Ekliptik zur Zeit t oder den Winkel $E_1 \Upsilon_1 A = \varepsilon$, so ist in dem Dreieck $\Pi_1 Z' S$ der Winkel $S \Pi_1 Z' = 90° - l_c$ und der Bogen $\Pi_1 Z' = \varepsilon$, folglich

(28) $$\cos SZ' = \frac{z_c}{r_c} = \sin b_c \cos \varepsilon + \cos b_c \sin l_c \sin \varepsilon.$$

Ferner ergibt sich aus dem Dreiecke SNB_1, wenn man berücksichtigt, daß die X'-Achse durch N gehen soll,

$$\cos SN = \frac{x_c}{r_c} = \cos b_c \cos NB_1 + \sin b_c \sin NB_1 \sin NB_1 \Upsilon_1.$$

Wenn der Bogen $N\Upsilon_1$ mit a bezeichnet wird, so läßt sich die letzte Gleichung ersetzen durch

(29) $$\cos SN = \frac{x_c}{r_c} = \cos b_c [\cos l_c \cos a - \sin l_c \sin a \cos \varepsilon] + \sin b_c \sin a \sin \varepsilon.$$

Endlich folgt aus dem Dreieck $SB_1 Y'$

$$\cos SY' = \frac{y_c}{r_c} = \cos b_c \cos B_1 Y' - \sin b_c \sin B_1 Y' \sin \Upsilon_1 B_1 Y',$$

oder, wenn das Dreieck $B_1 \Upsilon_1 Y'$ zu Hülfe genommen wird, worin $\Upsilon_1 Y' = 90° - a$ ist,

(30) $$\cos SY' = \frac{y_c}{r_c} = \cos b_c [\cos l_c \sin a + \sin l_c \cos a \cos \varepsilon] - \sin b_c \cos a \sin \varepsilon.$$

Aus den Gleichungen (28) und (30) ergibt sich

$$\frac{y_c z_c}{r_c^2} = \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \sin a \sin \varepsilon + \cos l_c \sin b_c \cos b_c \sin a \cos \varepsilon +$$
$$+ \frac{1}{2} (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \cos a \sin 2\varepsilon + \sin l_c \sin b_c \cos b_c \cos a \cos 2\varepsilon.$$

Da die Gleichung (29) aus (30) entsteht, wenn man in letzterer a durch $90° + a$ ersetzt, so führt dieselbe Substitution, auf die vorige Gleichung angewandt, ohneweiters zu dem Ausdruck für $\frac{x_c z_c}{r_c^2}$. Man erhält demnach für die in den Gleichungen (27) vorkommenden Quotienten $\frac{y_c z_c}{r_c^2 \sin \varepsilon'}$ und $\frac{x_c z_c}{r_c^2}$

(31) $$\frac{y_c z_c}{r_c^2 \sin \varepsilon'} = \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \cos l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon'} +$$
$$+ \frac{1}{2} (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \sin l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'}.$$

(32) $$\frac{x_c z_c}{r_c^2} = \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \cos a \sin \varepsilon + \cos l_c \sin b_c \cos b_c \cos a \cos \varepsilon -$$
$$- \frac{1}{2} (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \sin a \sin 2\varepsilon - \sin l_c \sin b_c \cos b_c \sin a \cos 2\varepsilon.$$

Aus den Gleichungen (31) und (32) leitet man durch Vertauschung des Index c mit $\odot$ die entsprechenden für die Sonne gültigen Gleichungen ab; da aber für die vorliegende Untersuchung die Breite der Sonne gleich 0 gesetzt werden darf, so ergibt sich

$$(31^a)\qquad \frac{y_\odot z_\odot}{r_\odot^2 \sin\varepsilon'} = \frac{1}{2} \sin 2 l_\odot \frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} + \frac{1}{2} \sin^2 l_\odot \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'}$$

$$(32^a)\qquad \frac{x_\odot z_\odot}{r_\odot^2} = \frac{1}{2} \sin 2 l_\odot \cos a \sin\varepsilon - \frac{1}{2} \sin^2 l_\odot \sin a \sin 2\varepsilon.$$

Durch Substitution der Ausdrücke (31) bis (32^a) in die Gleichungen (27) erhält man

$$(33^1)\qquad -\frac{d\psi}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\Bigg[\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\sin a \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon'} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'} +$$

$$+ \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'}\Bigg] +$$

$$+ \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2 l_\odot \frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'}\right]$$

$$(33^2)\qquad \frac{d\varepsilon'}{dt} = -\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\Bigg[\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \cos a \sin\varepsilon + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c \cos a \cos\varepsilon -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \sin a \sin 2\varepsilon -$$

$$- \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c \sin a \cos 2\varepsilon\Bigg] -$$

$$- \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2 l_\odot \cos a \sin\varepsilon - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot \sin a \sin 2\varepsilon\right].$$

6. Um die Differentialgleichungen (33) integrieren zu können, muß man die Koeffizienten von $\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}$ und $\frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}$ als Funktionen der Zeit darstellen. Es soll zunächst die Entwickelung der Faktoren $\frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'}$, ..., $\sin a \sin 2\varepsilon$ gegeben werden; zu diesem Zweck ist aber die Berechnung von a und ε erforderlich. Es bedeute Π die Länge des aufsteigenden Knotens der beweglichen Ekliptik EE (Fig. 5) auf der festen, vom festen Äquinox ♈ aus in der Richtung ♈E_0 gerechnet; der Winkel $E_0 E E_1$ werde mit π bezeichnet. Unter ψ soll die von ♈ aus gerechnete und in der Richtung nach N hin negativ gezählte Länge des niedersteigenden Knotens des beweglichen Äquators auf der festen Ekliptik verstanden werden; in Fig. 5 ist also ψ negativ und somit der Bogen N♈ absolut genommen gleich $-\psi$. Da der Bogen E♈ nach dem vorhin Gesagten gleich $180°-\Pi$ ist, so ist der Bogen $EN = 180°-\Pi+\psi$; ferner hat man $EN♈_1 = 180°-\varepsilon'$, $N♈_1 E = \varepsilon$, $N♈_1 = a$. Setzt man noch $E♈_1 = b$, so gibt das Dreieck $NE♈_1$

$$(34)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tang}\frac{1}{2}(b+a) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'+\pi)}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'-\pi)} \operatorname{tang}\frac{1}{2}(180-\Pi+\psi) \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}(b-a) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'+\pi)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'-\pi)} \operatorname{tang}\frac{1}{2}(180-\Pi+\psi) \end{aligned}$$

Auf die erste dieser Gleichungen wende man die bekannte Reihenentwicklung an, wonach, wenn

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{h}{\iota} \operatorname{tang} \varphi$$

gegeben ist und

$$\frac{h-\iota}{h+\iota} = p$$

gesetzt wird,

$$\varphi_1 = \varphi + p \sin 2\varphi + \frac{1}{2} p^2 \sin 4\varphi + \ldots$$

ist; man erhält dann

$$(35) \qquad \frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(180 - \Pi + \psi) + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varepsilon' \sin(\Pi - \psi) - \\ - \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\pi \operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\varepsilon' \sin 2(\Pi-\psi) + \ldots.$$

Wie die Vergleichung der beiden Gleichungen (34) miteinander lehrt, erhält man aus der Reihe für $\frac{1}{2}(b+a)$ diejenige für $\frac{1}{2}(b-a)$, wenn man in der ersteren ε' durch $180°+\varepsilon'$ ersetzt; es wird also

$$(36) \qquad \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(180 - \Pi + \psi) - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon' \sin(\Pi - \psi) - \\ - \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\pi \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varepsilon' \sin 2(\Pi-\psi) - \ldots.$$

Die Änderungen, welche die Lage der Erdbahn infolge der durch die Planeten bewirkten Störungen erleidet, sind teils säkuläre, teils periodische; für die gegenwärtige Untersuchung genügt es aber, nur die säkulären Glieder zu berücksichtigen und demnach zu setzen

$$(37) \qquad \begin{aligned} \pi \sin \Pi &= p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \ldots.. \\ \pi \cos \Pi &= q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \ldots.. \end{aligned}$$

Wird die Zeit vom Beginn des Jahres 1850 an gezählt und als Einheit von t ein julianisches Jahrhundert = 36525 mittlere Sonnentage gewählt, so ist nach Newcomb

$$(37^a) \qquad \begin{aligned} p_1 &= +\ 5''341, & p_2 &= +0''1935, & p_3 &= -0''00019 \\ q_1 &= -46.838, & q_2 &= +0.0563, & q_3 &= +0.00035. \end{aligned}$$

Die Formeln, zu welchen die Theorie der Drehung der Erde führt, sollen im Folgenden nur mit einer Genauigkeit gegeben werden, wie sie für den Zeitraum von 1750 bis 1950 ausreichend ist. Da vorhin 1850.0 als Ausgangspunkt der Zeitrechnung gewählt wurde, so wird t höchstens gleich ± 1 und demnach ergibt sich aus (37) und (37^a), daß der Maximalwert von π gleich $47''$ ist. Den Beobachtungen zufolge weicht ε' im Laufe von 200 Jahren stets um weniger wie $10''$ von seinem mittleren Werte ab; setzt man

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon,$$

wo $\varepsilon_0 = 23° 27' 31''68$ (Newcomb) den für 1850.0 gültigen Wert von ε' bedeutet und nach der zweiten Gleichung (26^a)

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{Cn}\int_0^t M\,dt$$

ist, so kann man in (35) und (36)

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varepsilon' = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varepsilon_0 - \frac{\Delta\varepsilon}{2\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon' = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{\Delta\varepsilon}{2\cos^2\frac{1}{2}\varepsilon_0}$$

annehmen. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varepsilon' + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon' = \frac{2}{\sin\varepsilon_0} - 2\frac{\Delta\varepsilon\operatorname{cotg}\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varepsilon' - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon' = 2\operatorname{cotg}\varepsilon_0 - 2\frac{\Delta\varepsilon}{\sin^2\varepsilon_0}.$$

Für $\pi = 47''$ und $\varepsilon_0 = 23° \; 27'$ wird der Koeffizient von $\sin 2(\Pi - \psi)$ in (35) gleich $0\rlap{.}''03$ und in (36) verschwindend klein. Im dritten Gliede auf der rechten Seite von (35) kann demnach $\varepsilon' = \varepsilon_0$ gesetzt werden, und das entsprechende Glied in (36) ist ganz zu vernachlässigen. Endlich läßt sich $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi$ mit $\frac{1}{2}\pi$ vertauschen. Somit erhält man aus (35) und (36)

$$a = \frac{\pi\sin(\Pi-\psi)}{\sin\varepsilon_0} - \frac{\pi\,\Delta\varepsilon\sin(\Pi-\psi)\cos\varepsilon_0}{\sin^2\varepsilon_0} - \frac{1}{8}\pi^2\sin 2(\Pi-\psi)\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\varepsilon_0,$$

$$b = 180° - \Pi + \psi +$$
$$+ \pi\sin(\Pi-\psi)\operatorname{cotg}\varepsilon_0 - \frac{\pi\,\Delta\varepsilon\sin(\Pi-\psi)}{\sin^2\varepsilon_0} - \frac{1}{8}\pi^2\sin 2(\Pi-\psi)\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\varepsilon_0.$$

Die Beobachtungen ergeben, daß $-\psi$ für ein Jahrhundert nicht größer als $1° \; 24'$ wird. Man setze nun auf der rechten Seite der zwei letzten Gleichungen in den Gliedern erster Ordnung

$$\pi\sin(\Pi-\psi) = \pi\sin\Pi\left(1 - \frac{1}{2}\psi^2\right) - \psi\pi\cos\Pi,$$

oder mit Benutzung der Gleichungen (37)

$$\pi\sin(\Pi-\psi) = p_1 t + p_2 t^2 - \psi q_1 t - \frac{1}{2}\psi^2 p_1 t - \psi q_2 t^2,$$

ferner setze man in den mit $\pi\Delta\varepsilon$ und π^2 multiplizierten Gliedern

$$\pi\sin(\Pi-\psi) = p_1 t$$
$$\pi^2\sin 2(\Pi-\psi) = 2p_1 q_1 t^2 - 2\psi q_1^2 t^2.$$

Wenn man jetzt zur Abkürzung schreibt

$$a_1 = \frac{p_1}{\sin\varepsilon_0} t$$

(38) $$a_2 = \left(\frac{p_2}{\sin\varepsilon_0} - \frac{1}{4}p_1 q_1\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\varepsilon_0\right)t^2 - \frac{\psi q_1}{\sin\varepsilon_0}t - \frac{p_1\,\Delta\varepsilon\operatorname{cotg}\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}t$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{4}q_1^2\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\varepsilon_0 - \frac{q_2}{\sin\varepsilon_0}\right)\psi t^2 - \frac{p_1}{2\sin\varepsilon_0}\psi^2 t$$

$$
(39)\quad
\begin{aligned}
b_0 &= 180 - \Pi + \psi \\
b_1 &= p_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 \\
b_2 &= \left(p_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{1}{4} p_1 q_1 \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \varepsilon_0\right) t^2 - \psi q_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{p_1 \Delta \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon_0} t, \\
b_3 &= \left(\frac{1}{4} q_1^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \varepsilon_0 - q_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0\right) \psi t^2 - \frac{1}{2} p_1 \psi^2 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0
\end{aligned}
$$

wobei die Indices die Ordnung der Glieder angeben sollen, so wird

$$
(40)\quad
\begin{aligned}
a &= a_1 + a_2 + a_3 \\
b &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3.
\end{aligned}
$$

Unter der vorhin gemachten Voraussetzung, daß $+1 \gtreqless t \gtreqless -1$ sein soll, wird a_1 höchstens gleich 13ʺ4, b_1 höchstens gleich 12ʺ3, während a_2 und b_2 im Maximum nur Bruchteile einer Sekunde betragen. Die sehr kleinen Glieder a_3 und b_3 sind mit Rücksicht auf einige am Schlusse dieser Arbeit abzuleitende Formeln mitgeteilt worden; für die zunächst folgenden Rechnungen können sie vernachlässigt werden.

Man setze nun $b_1 + b_2 = \beta$, so daß nach (40) und (39) $b = 180° - \Pi + \psi + \beta$ wird; es folgt dann aus dem Dreieck $EN\Upsilon_1$ (Fig. 5)

$$
\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon') = \frac{\cos\left(\Pi - \psi - \frac{1}{2}\beta\right)}{\cos \frac{1}{2}\beta} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \pi
$$

und hieraus mit hinreichender Genauigkeit

$$
2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon') = \pi \cos (\Pi - \psi)
$$

Setzt man jetzt

$$
\cos \psi = 1 - \frac{1}{2} \psi^2, \quad \sin \psi = \psi,
$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf (37)

$$
(41)\quad \varepsilon = \varepsilon' + q_1 t + q_2 t^2 + p_1 t \psi + p_2 t^2 \psi - \frac{1}{2} q_1 t \psi^2
$$

Diese Gleichung wird noch in einer anderen Form angewandt werden. Wenn man nämlich wie oben

$$
\varepsilon' = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon
$$

setzt und die Abkürzungen einführt

$$
\begin{aligned}
\Delta \varepsilon + q_1 t &= E_1 \\
q_2 t^2 + p_1 \psi t &= E_2 \\
p_2 t^2 \psi - \frac{1}{2} q_1 t \psi^2 &= E_3,
\end{aligned}
$$

so verwandelt sich die Gleichung (41) in

$$
(42)\quad \varepsilon = \varepsilon_0 + E_1 + E_2 + E_3.
$$

Für $t = 1$ ist $E_1 < 57''$ und $E_2 < 0''2$. Das sehr kleine Glied E_3 kann man vernachlässigen; wenn es trotzdem angeführt ist, so geschieht dies aus demselben Grunde, der für die Mitteilung der in (38) und (39) gegebenen Werte von a_3 und b_3 bestimmend war.

Nachdem im vorhergehenden die Ausdrücke für a und ε abgeleitet worden sind, lassen sich die in den Gleichungen (33) auftretenden Faktoren $\frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'}, \ldots, \sin a \cos 2\varepsilon$ leicht entwickeln.

Mit Rücksicht auf die angegebenen Maximalwerte von a_1, a_2, E_1, E_2 setze man

$$\sin a = a_1 + a_2\,, \qquad \cos a = 1\,, \qquad \sin(E_1 + E_2) = E_1 + E_2\,, \qquad \cos(E_1 + E_2) = 1 - \frac{1}{2} E_1^2.$$

Sieht man auch weiterhin von allen Gliedern dritter und höherer Ordnung ab, so ergibt sich zunächst unter Benutzung der Gleichung (41)

$$\frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = (a_1 + a_2) + a_1 q_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon'$$

$$\frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = (a_1 + a_2) \operatorname{cotg} \varepsilon' - a_1 q_1 t$$

Da aber

$$\operatorname{cotg} \varepsilon' = \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{\Delta \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon_0}$$

gesetzt werden kann, so wird mit Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung

(43)
$$\frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = (a_1 + a_2) + a_1 q_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0$$

$$\frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = (a_1 + a_2) \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{a_1 \Delta \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon_0} - a_1 q_1 t$$

Ferner hat man unter Anwendung der Gleichung (42)

$$\cos a \sin 2\varepsilon = \sin 2\varepsilon = (1 - 2E_1^2) \sin 2\varepsilon_0 + 2(E_1 + E_2) \cos 2\varepsilon_0$$

$$\cos a \cos 2\varepsilon = \cos 2\varepsilon = (1 - 2E_1^2) \cos 2\varepsilon_0 - 2(E_1 + E_2) \sin 2\varepsilon_0.$$

Wird nun

$$\frac{1}{\sin \varepsilon'} = \frac{1}{\sin \varepsilon_0}\left(1 - \Delta \varepsilon \operatorname{cotg} \varepsilon_0 + \frac{1 + \cos^2 \varepsilon_0}{2 \sin^2 \varepsilon_0} \Delta \varepsilon^2\right)$$

gesetzt, so folgt

(44)
$$\frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}\left(1 - \Delta \varepsilon \operatorname{cotg} \varepsilon_0 + \frac{1 + \cos^2 \varepsilon_0}{2 \sin^2 \varepsilon_0} \Delta \varepsilon^2 - 2E_1^2\right) + $$
$$+ \frac{2 \cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} (E_1 + E_2 - E_1 \Delta \varepsilon \operatorname{cotg} \varepsilon_0)$$

$$\frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}\left(1 - \Delta \varepsilon \operatorname{cotg} \varepsilon_0 + \frac{1 + \cos^2 \varepsilon_0}{2 \sin^2 \varepsilon_0} \Delta \varepsilon^2 - 2E_1^2\right) - $$
$$- \frac{2 \sin 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} (E_1 + E_2 - E_1 \Delta \varepsilon \operatorname{cotg} \varepsilon_0).$$

Endlich erhält man mit Hilfe der Gleichung (42)

(45)
$$\cos a \sin \varepsilon = \left(1 - \frac{1}{2} E_1^2\right) \sin \varepsilon_0 + (E_1 + E_2) \cos \varepsilon_0$$

$$\cos a \cos \varepsilon = \left(1 - \frac{1}{2} E_1^2\right) \cos \varepsilon_0 - (E_1 + E_2) \sin \varepsilon_0$$

und

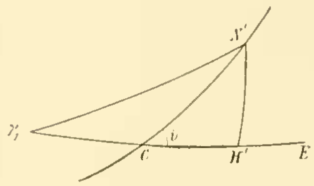
(46)
$$\sin a \sin 2\varepsilon = (a_1 + a_2) \sin 2\varepsilon_0 + 2 a_1 E_1 \cos 2\varepsilon_0$$

$$\sin a \cos 2\varepsilon = (a_1 + a_2) \cos 2\varepsilon_0 - 2 a_1 E_1 \sin 2\varepsilon_0.$$

7. Es sind nun auch die in den Gleichungen (33) enthaltenen, von den Polarkoordinaten des Mondes und der Sonne abhängigen Faktoren $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c\,, \; \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l, \ldots$ als Funktionen der

Zeit darzustellen. Zuvor aber soll an Stelle der Länge und Breite des Mondes seine Länge in der Bahn und die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik eingeführt werden. Zur Zeit t sei $\Upsilon_1 E$ (Fig. 6) die Ebene der Ekliptik, Υ_1 das Frühlingsäquinox und CN' die Mondbahn; die Länge des aufsteigenden Knotens der Mond-

Fig. 6.



bahn auf der Ekliptik, also der Bogen $\Upsilon_1 C$, möge mit Ω und die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, oder der Winkel $N'CH'$, mit i bezeichnet werden; ferner stelle $N'H'$ den Breitenkreis des Mondes dar. Es ist somit $b_c = N'H'$ und $l_c = \Omega + CH'$. Legt man durch Υ_1 und N' einen Bogen größten Kreises und bestimmt $\cos \Upsilon_1 N'$ und $\sin \Upsilon_1 N' \cos N'\Upsilon_1 H'$ sowohl aus dem Dreieck $\Upsilon_1 H'N'$ als aus dem Dreieck $\Upsilon_1 CN'$, so ergibt sich durch Gleichstellung der einander entsprechenden Ausdrücke, wenn noch der Bogen $CN' = w$ gesetzt wird,

$$\cos l_c \cos b_c = \cos w \cos \Omega - \sin w \sin \Omega \cos i$$

$$\sin l_c \cos b_c = \cos w \sin \Omega + \sin w \cos \Omega \cos i.$$

Durch eine kleine Umformung erhält man hieraus die zwei ersten der folgenden Gleichungen; die dritte Gleichung ergibt sich aus dem Dreiecke $CN'H'$

$$\cos l_c \cos b_c = \cos (w + \Omega) \cos^2 \frac{1}{2} i + \cos (w - \Omega) \sin^2 \frac{1}{2} i$$

$$\sin l_c \cos b_c = \sin (w + \Omega) \cos^2 \frac{1}{2} i - \sin (w - \Omega) \sin^2 \frac{1}{2} i$$

$$\sin b_c = \sin w \sin i.$$

Die Neigung i schwankt zwischen $5° \, 0'$ und $5° \, 18'$; vernachlässigt man $\sin^4 \frac{1}{2} i$, so erhält man aus den drei letzten Gleichungen

$$\sin l_c \cos l_c \cos^2 b = \sin (w + \Omega) \cos (w + \Omega) \cos^4 \frac{1}{2} i + \sin 2\,\Omega \sin^2 \frac{1}{2} i \cos^2 \frac{1}{2} i$$

$$\cos l_c \sin b_c \cos b_c = \cos (w + \Omega) \sin w \cos^2 \frac{1}{2} i \sin i + \cos (w - \Omega) \sin w \sin^2 \frac{1}{2} i \sin i$$

$$\sin^2 l_c \cos^2 b_c = \sin^2 (w + \Omega) \cos^4 \frac{1}{2} i - 2 \sin (w + \Omega) \sin (w - \Omega) \sin^2 \frac{1}{2} i \cos^2 \frac{1}{2} i$$

$$\sin^2 b_c = \sin^2 w \sin^2 i$$

$$\sin l_c \sin b_c \cos b_c = \sin (w + \Omega) \sin w \cos^2 \frac{1}{2} i \sin i - \sin (w - \Omega) \sin w \sin^2 \frac{1}{2} i \sin i.$$

Hier lassen sich die Formeln anwenden

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \sin (x + y) + \frac{1}{2} \sin (x - y)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} \cos (x - y) - \frac{1}{2} \cos (x + y),$$

und es ergibt sich, wenn man die Glieder $\frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} i \sin i \sin (2w - \Omega)$ und $\frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} i \sin i \cos (2w - \Omega)$ vernachlässigt und auf beiden Seiten mit $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$, beziehungsweise $\frac{1}{2} \left(\frac{H}{r_c}\right)^3$ multipliziert,

$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c = \frac{1}{2} \cos^4 \frac{1}{2} i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w + 2\Omega) + \frac{1}{4} \sin^2 i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin 2\Omega$$

$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} i \sin i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w + \Omega) - \frac{1}{4} \sin 2i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin \Omega$$

(48)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) = \frac{1}{4}\left(\cos^4 \frac{1}{2} i - \sin^2 i\right)\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 - \frac{1}{4} \cos^4 \frac{1}{2} i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos(2w + 2\Omega) +$$
$$+ \frac{3}{8} \sin^2 i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos 2w - \frac{1}{8} \sin^2 i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos 2\Omega$$

$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c = -\frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} i \sin i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos(2w + \Omega) + \frac{1}{4} \sin 2i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos \Omega.$$

Die Lösung der Aufgabe, die rechten Seiten dieser Gleichungen mit Hülfe der durch die Mondtheorie gegebenen Formeln als Funktionen der Zeit darzustellen, erfordert dem ersten Anscheine nach sehr umständliche Rechnungen; in Wirklichkeit aber ist die aufzuwendende Mühe nicht groß und läßt sich die ganze Arbeit auf die Entwicklung der zwei Ausdrücke $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+2\Omega)$ und $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin 2i \sin \Omega$ zurückführen. Die Berechnung des Ausdruckes $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w + 2\Omega)$ soll im Folgenden auf Grund der Delaunay'schen Theorie der Mondbewegung vorgenommen werden; es genügt aber vollkommen, nur die Hauptglieder dieser Theorie zu berücksichtigen.

Es sei

e, e' = Exzentrizität der Mond-, beziehungsweise der Erdbahn

n, n' = mittlere Bewegung des Mondes, beziehungsweise der Sonne

$$m = \frac{n'}{n}$$

g, g' = mittlere Anomalie des Mondes, beziehungsweise der Sonne

ω, ω' = Abstand des Mond-, beziehungsweise des Sonnenperigäums vom aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Ekliptik

$$D = g + \omega - g' - \omega'.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$1 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} e'^2\right) m^2 = \frac{1}{K_0}$$

$$\left[e - \frac{7}{12} e m^2 - \frac{285}{64} e m^3 - \frac{45091}{2304} e m^4\right] K_0 = e_1$$

$$\left[e^2 - \frac{1}{3} e^4 - \frac{5}{6} e^2 m^2 - \frac{735}{64} e^2 m^3\right] K_0 = e_2$$

$$\left[m^2 + \frac{19}{6} m^3 + \frac{15}{4} e^2 m + \frac{131}{18} m^4 + \frac{189}{16} e^2 m^2 + \frac{10483}{256} e^2 m^3 + \frac{383}{27} m^5 - \frac{5}{2} e'^2 m^2\right] K_0 = \sigma_2$$

$$\left[\frac{15}{8} e m + \frac{187}{32} e m^2 + \frac{29513}{1536} e m^3 + \frac{1161961}{18432} e m^4 - \frac{75}{16} e e'^2 m\right] K_0 = \tau_2$$

$$\left[\frac{33}{16} e m^2 + \frac{101}{16} e m^3 + \frac{405}{64} e^3 m + \frac{5037}{256} e^3 m^2 + \frac{5303}{384} e m^4\right] K_0 = \omega_3$$

so ist nach Delaunay

(49) $$\frac{H}{r_c} = 1 + e_1 \cos g + e_2 \cos 2g + \sigma_2 \cos 2D + \tau_2 \cos(2D-g) + \omega_3 \cos(2D+g).$$

Mit Benutzung der von Delaunay angewandten Werte

$$e = 0.05490, \qquad e' = 0.01677, \qquad m = 0.07480$$

ergibt sich

$$\log e_1 = 8.7368 \qquad \log \sigma_2 = 7.917 \qquad \log \omega_3 = 6.95$$

$$\log e_2 = 7.474 \qquad \log \tau_2 = 8.001.$$

Wird die Summe der auf der rechten Seite der Gleichung (49) auf $e_1 \cos g$ folgenden Glieder mit f bezeichnet, so nimmt die Gleichung die Form an

$$\frac{H}{r_c} = 1 + e_1 \cos g + f.$$

Hieraus erhält man mit hinreichender Genauigkeit

$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 = 1 + 3(e_1 \cos g + f) + 3(e_1^2 \cos^2 g + 2 f e_1 \cos g + f^2).$$

In dem letzten Gliede darf man, indem für f sein Wert substituiert wird,

$$f^2 = \sigma_2^2 \cos^2 2D + \tau_2^2 \cos^2(2D-g) + 2\sigma_2\tau_2 \cos 2D \cos(2D-g)$$

setzen oder, unter Anwendung der Formel

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

und mit Vernachlässigung einiger für die Folge einflußlosen Glieder

$$f^2 = \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \frac{1}{2}\tau_2^2 + \sigma_2\tau_2 \cos g.$$

Substituiert man diesen Ausdruck und den von f in die Gleichung für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$ so ergibt sich, wenn zur Abkürzung

$$1 + \frac{3}{2}(e_1^2 + \sigma_2^2 + \tau_2^2) = \alpha_0 \qquad \log \alpha_0 = 0.00204$$

$$3e_1 + 3e_1 e_2 + 3\sigma_2\tau_2 = \beta_1 \qquad \text{»}\ \beta_1 = 9.2159$$

$$3e_2 + \frac{3}{2}e_1^2 = \beta_2 \qquad \text{»}\ \beta_2 = 8.127$$

$$3\sigma_2 + 3e_1\tau_2 + 3e_1\omega_3 = \delta_2 \qquad \text{»}\ \delta_2 = 8.424$$

$$3\tau_2 + 3e_1\sigma_2 = \varepsilon_2 \qquad \text{»}\ \varepsilon_2 = 8.497$$

$$3\omega_3 + 3e_1\sigma_2 = \varepsilon_3 \qquad \text{»}\ \varepsilon_3 = 7.60$$

$$3e_1\tau_2 = \eta_3 \qquad \text{»}\ \eta_3 = 7.21$$

gesetzt und die Summe $3e_1 e_2 \cos 3g + 3e_1 \omega_3 \cos(2D + 2g)$ vernachlässigt wird,

$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 = \alpha_0 + \beta_1 \cos g + \beta_2 \cos 2g + \delta_2 \cos 2D + \varepsilon_2 \cos(2D-g) + \varepsilon_3 \cos(2D+g) + \eta_3 \cos(2D-2g). \tag{50}$$

Der Bogen $w + \Omega$ oder die Länge des Mondes in seiner Bahn folgt aus dem Delaunay'schen Ausdruck für die Länge des Mondes bezogen auf die Ekliptik, indem man die mit γ (= Sinus des halben Neigungswinkels der Mondbahn gegen die Ekliptik) multiplizierten Glieder fortläßt. Wird

$$4e - \frac{1}{2}e^3 = k_1$$

$$\frac{5}{2}e^2 - \frac{11}{12}e^4 - \frac{7}{8}e^2 m^2 - \frac{2595}{128}e^2 m^3 = k_2$$

$$\frac{11}{4}m^2 + \frac{59}{6}m^3 + \frac{75}{8}e^2 m + \frac{893}{36}m^4 + \frac{1101}{32}e^2 m^2 + \frac{2855}{54}m^5 + \frac{64271}{512}e^2 m^3 = \lambda_2$$

$$\frac{15}{2}em + \frac{263}{8}em^2 + \frac{48217}{384}em^3 + \frac{1880537}{4608}em^4 = \mu_2$$

$$\frac{17}{4}em^2 + \frac{169}{12}em^3 + \frac{195}{16}e^3 m + \frac{9577}{288}em^4 + \frac{2655}{64}e^3 m^2 = \mu_3$$

$$\frac{45}{8}e^2 m + \frac{53}{2}e^2 m^2 + \frac{263089}{1536}e^2 m^3 + \frac{7700107}{9216}e^2 m^4 + \frac{1932163643}{442368}e^2 m^5 = \nu_3$$

gesetzt, und bedeutet c die mittlere Länge des Mondes in seiner Bahn, so hat man

$$2w + 2\Omega = 2c + k_1 \sin g + k_2 \sin 2g + \lambda_2 \sin 2D + \mu_2 \sin(2D-g) + \mu_3 \sin(2D+g) + \nu_3 \sin(2D-2g) \tag{51}$$

Mit Hülfe der oben angegebenen Werte von e und m ergibt sich

$$\log k_1 = 9.3415 \qquad \log \lambda_2 = 8.3664 \qquad \log \mu_3 = 7.273$$
$$\text{»}\ k_2 = 7.874 \qquad \text{»}\ \mu_2 = 8.6482 \qquad \text{»}\ \nu_3 = 7.310.$$

Wenn man die Summe der auf der rechten Seite der Gleichung (51) auf $2c$ folgenden periodischen Glieder mit p bezeichnet, so erhält man unter Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung

$$\begin{aligned} \sin(2w + 2\Omega) &= \sin[2c + p] = \left(1 - \frac{1}{2}p^2\right)\sin 2c + \left(p - \frac{1}{6}p^3\right)\cos 2c \\ \cos(2w + 2\Omega) &= \cos[2c + p] = \left(1 - \frac{1}{2}p^2\right)\cos 2c - \left(p - \frac{1}{6}p^3\right)\sin 2c. \end{aligned} \tag{52}$$

Es reicht nun völlig aus, wenn man setzt

$$\frac{1}{6}p^3 = \frac{1}{6}[k_1^3 \sin^3 g + 3k_1^2 k_2 \sin^2 g \sin 2g + 3k_1^2 \lambda_2 \sin^2 g \sin 2D + 3k_1^2 \mu_2 \sin^2 g \sin(2D-g)].$$

Wendet man auf diesen Ausdruck die Formel

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$$

an und vernachlässigt alle die Glieder, welche von anderen Argumenten als den in (50) und (51) enthaltenen abhängen, so ergibt sich

$$\frac{1}{6}p^3 = \frac{1}{8}k_1^3 \sin g + \frac{1}{4}k_1^2 k_2 \sin 2g + \frac{1}{4}k_1^2 \lambda_2 \sin 2D + \frac{1}{4}k_1^2 \mu_2 \sin(2D-g) - \frac{1}{8}k_1^2 \mu_2 \sin(2D+g) - \\ - \frac{1}{8}k_1^2 \lambda_2 \sin(2D-2g).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und unter Einführung des Wertes von p erhält man

(53) $$p - \frac{1}{6}p^3 = k_1\left(1-\frac{1}{8}k_1^2\right)\sin g + k_2\left(1-\frac{1}{4}k_1^2\right)\sin 2g + \lambda_2\left(1-\frac{1}{4}k_1^2\right)\sin 2D + \\ + \mu_2\left(1-\frac{1}{4}k_1^2\right)\sin(2D-g) + \left(\mu_3 + \frac{1}{8}k_1^2\mu_2\right)\sin(2D+g) + \left(\nu_3 + \frac{1}{8}k_1^2\lambda_2\right)\sin(2D-2g).$$

Ferner genügt es zu setzen

$$\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}k_1^2\sin^2 g + k_1 k_2 \sin 2g \sin g + k_1\lambda_2 \sin 2D \sin g + k_1\mu_2 \sin(2D-g)\sin g + \\ + k_1\mu_3 \sin(2D+g)\sin g + k_1\nu_3\sin(2D-2g)\sin g + \\ + \frac{1}{2}\lambda_2^2\sin^2 2D + \lambda_2\mu_2\sin 2D\sin(2D-g) + \frac{1}{2}\mu_2^2\sin^2(2D-g).$$

Macht man jetzt wieder von der obigen Formel für $\sin a \sin b$ Gebrauch und beschränkt sich auf solche Glieder, welche die in (50) und (51) auftretenden Argumente enthalten, so ergibt sich

(54) $$1 - \frac{1}{2}p^2 = 1 - \frac{1}{4}(k_1^2 + \lambda_2^2 + \mu_2^2) - \frac{1}{2}(k_1 k_2 + \lambda_2\mu_2)\cos g + \frac{1}{4}k_1^2\cos 2g + \\ + \frac{1}{2}k_1(\mu_2-\mu_3)\cos 2D - \frac{1}{2}k_1(\lambda_2-\nu_3)\cos(2D-g) + \frac{1}{2}k_1\lambda_2\cos(2D+g) - \frac{1}{2}k_1\mu_2\cos(2D-2g).$$

Aus den Gleichungen (52), (53) und (54) folgt, wenn zur Abkürzung

$$1 - \frac{1}{4}(k_1^2 + \lambda_2^2 + \mu_2^2) = s_0 \qquad \log s_0 = 9.99446$$

$$\frac{1}{2}k_1\left(1-\frac{1}{8}k_1^2\right) - \frac{1}{4}(k_1 k_2 + \lambda_2\mu_2) = s_1 \qquad » \ s_1 = 9.0352$$

$$\frac{1}{2}k_1\left(1-\frac{1}{8}k_1^2\right) + \frac{1}{4}(k_1 k_2 + \lambda_2\mu_2) = t_1 \qquad » \ t_1 = 9.0406$$

$$\frac{1}{8}k_1^2 + \frac{1}{2}k_2\left(1-\frac{1}{4}k_1^2\right) = s_2 \qquad » \ s_2 = 7.9877$$

$$\frac{1}{8}k_1^2 - \frac{1}{2}k_2\left(1-\frac{1}{4}k_1^2\right) = t_2 \qquad » \ t_2 = 7.367$$

$$\frac{1}{2}\lambda_2\left(1-\frac{1}{4}k_1^2\right) + \frac{1}{4}k_1(\mu_2-\mu_3) = u_2 \qquad » \ u_2 = 8.1406$$

$$\frac{1}{2}\lambda_2\left(1-\frac{1}{4}k_1^2\right) - \frac{1}{4}k_1(\mu_2-\mu_3) = v_2 \qquad » \ v_2 = 7.9612$$

$$\frac{1}{2}\mu_2\left(1-\frac{1}{4}k_1^2\right) - \frac{1}{4}k_1(\lambda_2-\nu_3) = x_2 \qquad » \ x_2 = 8.3182$$

$$\frac{1}{2}\mu_2\left(1-\frac{1}{4}k_1^2\right) + \frac{1}{4}k_1(\lambda_2-\nu_3) = y_2 \qquad » \ y_2 = 8.3642$$

$$\frac{1}{4} k_1 \lambda_2 + \frac{1}{2}\left(\mu_3 + \frac{1}{8} k_1^2 \mu_2\right) = s_3 \qquad \log s_3 = 7.371$$

$$\frac{1}{4} k_1 \lambda_2 - \frac{1}{2}\left(\mu_3 + \frac{1}{8} k_1^2 \mu_2\right) = t_3 \qquad » \; t_3 = 6.31$$

$$\frac{1}{4} k_1 \mu_2 - \frac{1}{2}\left(\nu_3 + \frac{1}{8} k_1^2 \lambda_2\right) = u_3 \qquad » \; u_3 = 7.131$$

$$\frac{1}{4} k_1 \mu_2 + \frac{1}{2}\left(\nu_3 + \frac{1}{8} k_1^2 \lambda_2\right) = v_3 \qquad » \; v_3 = 7.548$$

gesetzt wird,

(55)
$$\sin(2w + 2\Omega) = \underset{9919.8}{s_0} \sin 2c + \underset{1089}{s_1} \sin[2c + g] - \underset{1103}{t_1} \sin[2c - g] +$$
$$+ \underset{98}{s_2} \sin[2c + 2g] + \underset{23}{t_2} \sin[2c - 2g] + \underset{139}{u_2} \sin[2c + 2D] - \underset{92}{v_2} \sin[2c - 2D] +$$
$$+ \underset{209}{x_2} \sin[2c + 2D - g] - \underset{232}{y_2} \sin[2c - 2D + g] + \underset{24}{s_3} \sin[2c + 2D + g] +$$
$$+ \underset{2}{t_3} \sin[2c - 2D - g] - \underset{14}{u_3} \sin[2c + 2D - 2g] - \underset{35}{v_3} \sin[2c - 2D + 2g]$$

Um nun das Produkt $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w + 2\Omega)$ zu entwickeln, setze man für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$ seinen durch die Gleichung (50) bestimmten Ausdruck ein. Als e r s t e s Glied des Produktes erhält man dann $\alpha_0 \sin(2w+2\Omega)$. Die Zahlenwerte der mit α_0 multiplizierten Koeffizienten der Gleichung (55), ausgedrückt in Einheiten der vierten Dezimale, findet man unterhalb der Koeffizienten angegeben; bei dem Koeffizienten von $\sin 2c$ ist auch die fünfte Dezimale mitgeteilt. Das z w e i t e Glied des Produktes ist $\beta_1 \cos g \sin(2w + 2\Omega)$. Unter Anwendung der Gleichung (55) und mit Benutzung der Formel

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a + b) + \frac{1}{2} \sin(a - b)$$

wird, wenn alle die kleinen Glieder unberücksichtigt bleiben, welche nicht von den in (55) vorkommenden Argumenten abhängen,

(56[1])
$$\beta_1 \cos g \sin(2w + 2\Omega) = \underset{1.1}{-\frac{1}{2}\beta_1(t_1 - s_1)} \sin 2c + \underset{820}{\frac{1}{2}\beta_1(s_0 + s_2)} \sin[2c + g] +$$
$$+ \underset{814}{\frac{1}{2}\beta_1(s_0 + t_2)} \sin[2c - g] + \underset{89}{\frac{1}{2}\beta_1 s_1} \sin[2c + 2g] - \underset{90}{\frac{1}{2}\beta_1 t_1} \sin[2c - 2g] +$$
$$+ \underset{19}{\frac{1}{2}\beta_1(x_2 + s_3)} \sin[2c + 2D] - \underset{19}{\frac{1}{2}\beta_1(y_2 - t_3)} \sin[2c - 2D] +$$
$$+ \underset{10}{\frac{1}{2}\beta_1(u_2 - u_3)} \sin[2c + 2D - g] - \underset{10}{\frac{1}{2}\beta_1(v_2 + v_3)} \sin[2c - 2D + g] +$$

(folg. Seite.)

$$+\underset{11}{\frac{1}{2}\beta_1 u_2} \sin[2c+2D+g] - \underset{8}{\frac{1}{2}\beta_1 v_2} \sin[2c-2D-g] +$$

$$+\underset{17}{\frac{1}{2}\beta_1 x_2} \sin[2c+2D-2g] - \underset{19}{\frac{1}{2}\beta_1 y_2} \sin[2c-2D+2g].$$

In dieser Formel sind unterhalb der Koeffizienten deren Zahlenwerte, ausgedrückt in Einheiten der vierten Dezimale, angegeben; dieselbe Bemerkung gilt für die folgenden Gleichungen, in denen wiederum alle Glieder vernachlässigt wurden, welche von anderen Argumenten abhängen als den in der Formel (55) auftretenden, außerdem aber auch diejenigen, deren Koeffizienten weniger als eine halbe Einheit der vierten Dezimale betragen. Man erhält so

$$(56^2) \qquad \beta_2 \cos 2g \sin(2w+2\Omega) = \underset{0\cdot 8}{\frac{1}{2}\beta_2 (s_2+t_2)} \sin 2c - \underset{7}{\frac{1}{2}\beta_2 t_1} \sin[2c+g] + \underset{7}{\frac{1}{2}\beta_2 s_1} \sin[2c-g] +$$

$$+\underset{66}{\frac{1}{2}\beta_2 s_0} \sin[2c+2g] + \underset{66}{\frac{1}{2}\beta_2 s_0} \sin[2c-2g] +$$

$$+\underset{1}{\frac{1}{2}\beta_2 x_2} \sin[2c+2D+g] - \underset{2}{\frac{1}{2}\beta_2 y_2} \sin[2c-2D-g] +$$

$$+\underset{1}{\frac{1}{2}\beta_2 u_2} \sin[2c+2D-2g] - \underset{1}{\frac{1}{2}\beta_2 v_2} \sin[2c-2D+2g].$$

$$(56^3) \qquad \delta_2 \cos 2D \sin(2w+2\Omega) = \underset{0\cdot 6}{\frac{1}{2}\delta_2 (u_2-v_2)} \sin 2c - \underset{3}{\frac{1}{2}\delta_2 (y_2-s_3)} \sin[2c+g] +$$

$$+\underset{3}{\frac{1}{2}\delta_2 (x_2+t_3)} \sin[2c-g] + \underset{131}{\frac{1}{2}\delta_2 s_0} \sin[2c+2D] +$$

$$+\underset{131}{\frac{1}{2}\delta_2 s_0} \sin[2c-2D] - \underset{15}{\frac{1}{2}\delta_2 t_1} \sin[2c+2D-g] +$$

$$+\underset{14}{\frac{1}{2}\delta_2 s_1} \sin[2c-2D+g] + \underset{14}{\frac{1}{2}\delta_2 s_1} \sin[2c+2D+g] -$$

$$-\underset{15}{\frac{1}{2}\delta_2 t_1} \sin[2c-2D-g] + \underset{1}{\frac{1}{2}\delta_2 s_2} \sin[2c-2D+2g].$$

$$(56^4)\quad \varepsilon_2 \cos(2D-g)\sin(2w+2\Omega) = \underset{2}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_2(u_2-v_3)\sin[2c+g] - \underset{2}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_2(v_2+u_3)\sin[2c-g] +$$
$$+\underset{17}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_2 s_1 \sin[2c+2D] - \underset{17}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_2 t_1 \sin[2c-2D] +$$
$$+\underset{155}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_2 s_0 \sin[2c+2D-g] + \underset{155}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_2 s_0 \sin[2c-2D+g] +$$
$$+\underset{2}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_2 s_2 \sin[2c+2D+g] - \underset{17}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_2 t_1 \sin[2c+2D-2g] +$$
$$+\underset{17}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_2 s_1 \sin[2c-2D+2g].$$

$$(56^5)\quad \varepsilon_3 \cos(2D+g)\sin(2w+2\Omega) = -\underset{2}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_3 t_1 \sin[2c+2D] + \underset{2}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_3 s_1 \sin[2c-2D] +$$
$$+\underset{20}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_3 s_0 \sin[2c+2D+g] + \underset{20}{\frac{1}{2}}\,\varepsilon_3 s_0 \sin[2c-2D-g].$$

$$(56^6)\quad \eta_3 \cos(2D-2g)\sin(2w+2\Omega) = \underset{8}{\frac{1}{2}}\,\eta_3 s_0 \sin[2c+2D-2g] + \underset{8}{\frac{1}{2}}\,\eta_3 s_0 \sin[2c-2D+2g].$$

Die Summe der mit α_0 multiplizierten Gleichung (55)[1]) und der Gleichungen (56^1) bis (56^6) ist gleich $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+2\Omega)$, und zwar folgt mit Benutzung der unterhalb der Koeffizienten der genannten Gleichungen mitgeteilten Zahlen

$$(57)\quad \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+2\Omega) = \underset{[9.9965]}{0.9920}\sin 2c + \underset{[9.2790]}{0.1901}\sin[2c+g] - \underset{[8.4487]}{0.0281}\sin[2c-g] +$$
$$+\underset{[8.4031]}{0.0253}\sin[2c+2g] - \underset{[6.00]}{0.0001}\sin[2c-2g] + \underset{[8.4829]}{0.0304}\sin[2c+2D] +$$
$$+\underset{[6.70]}{0.0005}\sin[2c-2D] + \underset{[8.5551]}{0.0359}\sin[2c+2D-g] -$$
$$-\underset{[7.863]}{0.0073}\sin[2c-2D+g] + \underset{[7.857]}{0.0072}\sin[2c+2D+g] -$$
$$-\underset{[6.48]}{0.0003}\sin[2c-2D-g] - \underset{[6.70]}{0.0005}\sin[2c+2D-2g] -$$
$$-\underset{[7.462]}{0.0029}\sin[2c-2D+2g].$$

In dieser Gleichung sind unterhalb der Koeffizienten ihre Logarithmen angegeben.

---

1) Man achte auf die p. 25, Z. 11 v. u. ff. gemachte Bemerkung.

Aus den Gleichungen (52) und (50) folgt, daß, wenn man auf der rechten Seite von (57) $2c$ durch $90°+2c$ oder auch die sin durch cos ersetzt, der Ausdruck für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos(2w+2\Omega)$ erhalten wird. Ferner lehrt die Gleichung (51), daß man, um $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+\Omega)$ und $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos(2w+\Omega)$ zu erhalten, in den Formeln für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+2\Omega)$, beziehungsweise $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos(2w+2\Omega)$ an Stelle von $2c$ zu setzen hat $2c-\Omega$; ersetzt man dagegen $2c$ durch $2c-2\Omega$, so ergeben sich die Gleichungen für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin 2w$ und $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos 2w$.

Es soll jetzt noch der Ausdruck $\frac{1}{4}\sin 2i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin\Omega$ entwickelt werden; dabei ist aber auf die periodischen Störungen der Elemente i und Ω Rücksicht zu nehmen. Bedeuten i_0 und Ω_0 die mittleren Werte von i und Ω, bedeuten ferner γ, γ' δ, δ' vier Konstanten und bezeichnet man mit L die mittlere Länge der Sonne, so ist[1]

$$(58)\qquad \begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \gamma \sin(2L-2\Omega_0) + \delta \sin 2\omega \\ i &= i_0 + \gamma' \cos(2L-2\Omega_0) + \delta' \cos 2\omega \end{aligned}$$

$$\log\gamma = 8.440, \qquad \log\delta = 7.152$$

$$\log\gamma' = 7.393, \qquad \log\delta' = 6.106.$$

Mit Hülfe von (58) ergibt sich, wenn die Abkürzungen

$$\frac{1}{4}\sin 2i_0 = i_1 \qquad \log i_1 = 8.64992$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\gamma \sin 2i_0 + \gamma' \cos 2i_0\right) = i_2 \qquad \text{»}\ i_2 = 7.088$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\delta \sin 2i_0 + \delta' \cos 2i_0\right) = i_3 \qquad \text{»}\ i_3 = 5.800$$

eingeführt werden, wo $i_0 = 5°\,8'\,43''$ anzunehmen ist,

$$\frac{1}{4}\sin 2i \sin\Omega = i_1 \sin\Omega_0 + i_2 \sin(2L-\Omega_0) + i_3 \sin(2\omega+\Omega_0).$$

Diese Gleichung ist mit der Gleichung (50) zu multiplizieren. Unter Vernachlässigung sehr kleiner und für die Folge bedeutungsloser Glieder erhält man, wenn nach Ausführung der Multiplikation an Stelle von Ω_0 wieder Ω gesetzt wird,

---

[1] Perchot, Sur les mouvements des noeuds et du périgée de la Lune, p. 40, Thèse, Paris 1892. Perchot bezeichnet mit g, was von mir mit ω bezeichnet wird.

$$(59)\quad \frac{1}{4}\sin 2i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin\Omega = \underset{8.65196}{\alpha_0}\, i_1 \sin\Omega + \frac{1}{2}\underset{7.565}{\beta_1}\, i_1 \sin(\Omega + g) + \frac{1}{2}\underset{7.565}{\beta_1}\, i_1 \sin(\Omega - g) +$$

$$+ \frac{1}{2}\underset{6.77}{\delta_2}\, i_1 \sin(\Omega + 2D) + \frac{1}{2}\underset{6.77}{\delta_2}\, i_1 \sin(\Omega - 2D) + \frac{1}{2}\underset{6.85}{\varepsilon_2}\, i_1 \sin(\Omega + 2D - g) +$$

$$+ \frac{1}{2}\underset{6.85}{\varepsilon_2}\, i_1 \sin(\Omega - 2D + g) + \underset{7.090}{\alpha_0\, i_2} \sin(2L - \Omega) + \underset{5.802}{\alpha_0\, i_3} \sin(2\omega + \Omega)\,.$$

Unterhalb der Koeffizienten sind ihre Logarithmen angegeben. Ersetzt man auf der rechten Seite von (59) die sin durch cos, so erhält man die Entwicklung für $\frac{1}{4}\sin 2i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos\Omega$.

Der Einfluß der periodischen Störungen von i und Ω auf die Glieder $\frac{1}{4}\sin^2 i\,\sin 2\Omega$ und $\frac{1}{4}\sin^2 i\cos 2\Omega$ ist zu vernachlässigen; es wird dann hinreichend genau

$$(60)\quad \begin{aligned} \frac{1}{4}\sin^2 i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin 2\Omega &= \frac{1}{4}\alpha_0\sin^2 i_0 \sin 2\Omega \qquad \log\frac{1}{4}\alpha_0\sin^2 i_0 = 7.3054\\ \frac{1}{8}\sin^2 i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos 2\Omega &= \frac{1}{8}\alpha_0\sin^2 i_0 \cos 2\Omega \qquad \log\frac{1}{8}\alpha_0\sin^2 i_0 = 7.0044\end{aligned}$$

wo rechts Ω statt Ω_0 gesetzt wurde. Die periodischen Störungen der Elemente i und Ω beeinflussen auch noch das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichungen (48), dieser Einfluß ist aber ohne Bedeutung für das Endresultat der Untersuchung und kann demnach unberücksichtigt bleiben.

Im Vorigen sind alle Formeln abgeleitet worden, deren man bedarf, um die gesuchten Entwicklungen der auf der linken Seite der Gleichungen (48) stehenden Ausdrücke zu erhalten. Zur Anwendung gelangen die Formeln (57), (59), (60) und wegen des ersten Gliedes auf der rechten Seite der dritten der Gleichungen (48) außerdem noch die Formel (50); für die in den Gleichungen (48) vorkommenden Koeffizienten, insoweit deren Werte nicht schon mitgeteilt wurden, hat man

$$\log\frac{1}{2}\cos^4\frac{1}{2}i = 9.6972 \qquad \log\frac{1}{4}\left(\cos^4\frac{1}{2}i - \sin^2 i\right) = 9.39267 \qquad \log\frac{3}{8}\sin^2 i = 7.4794$$

$$\log\frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{2}i\sin i = 8.6508 \qquad \log\frac{1}{4}\cos^4\frac{1}{2}i = 9.3962\,.$$

Wenn nun einige belanglose Glieder fortgelassen und die Koeffizienten logarithmisch angesetzt werden, so erhält man

$$(61^1)\quad \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c = 9.6937\sin 2c + 8.9762\sin[2c + g] + 8_n 1459\sin[2c - g] +$$

$$+ 8.1003\sin[2c + 2g] + 8.1801\sin[2c + 2D] + 6.40\sin[2c - 2D] +$$

$$+ 8.2523\sin[2c + 2D - g] + 7_n 560\sin[2c - 2D + g] +$$

$$+ 7.554\sin[2c + 2D + g] + 7_n 159\sin[2c - 2D + 2g] + 7.3054\sin 2\Omega$$

$$(61^2)\quad \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c = 8.6473 \sin[2c-\Omega] + 7.9298 \sin[2c+g-\Omega] + 7_n099 \sin[2c-g-\Omega] +$$

$$+ 7.054 \sin[2c+2g-\Omega] + 7.134 \sin[2c+2D-\Omega] +$$

$$+ 7.206 \sin[2c+2D-g-\Omega] + 8_n65196 \sin\Omega + 7_n565 \sin(\Omega+g) +$$

$$+ 7_n565 \sin(\Omega-g) + 6_n77 \sin(\Omega+2D) + 6_n77 \sin(\Omega-2D) +$$

$$+ 6_n85 \sin(\Omega+2D-g) + 6_n85 \sin(\Omega-2D+g) + 7_n090 \sin(2L-\Omega)$$

$$+ 5_n802 \sin(2\omega+\Omega)$$

$$(61^3)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) = 9.39471 + 8.6086 \cos g + 7.520 \cos 2g + 7.817 \cos 2D +$$

$$+ 7.890 \cos(2D-g) + 6.99 \cos(2D+g) + 6.60 \cos(2D-2g) +$$

$$+ 9_n 3927 \cos 2c + 8_n6752 \cos[2c+g] + 7.845 \cos[2c-g] +$$

$$+ 7_n799 \cos[2c+2g] + 7_n879 \cos[2c+2D] + 6_n10 \cos[2c-2D] +$$

$$+ 7_n951 \cos[2c+2D-g] + 7.259 \cos[2c-2D+g] +$$

$$+ 7_n253 \cos[2c+2D+g] + 6.858 \cos[2c-2D+2g] +$$

$$+ 7.476 \cos[2c-2\Omega] + 7_n004 \cos 2\Omega.$$

$$(61^4)\quad \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c = 8_n6473 \cos[2c-\Omega] + 7_n9298 \cos[2c+g-\Omega] + 7.0995 \cos[2c-g-\Omega] +$$

$$+ 7_n054 \cos[2c+2g-\Omega] + 7_n134 \cos[2c+2D-\Omega] +$$

$$+ 7_n206 \cos[2c+2D-g-\Omega] + 8.65196 \cos\Omega + 7.565 \cos(\Omega+g) +$$

$$+ 7.565 \cos(\Omega-g) + 6.77 \cos(\Omega+2D) + 6.77 \cos(\Omega-2D) +$$

$$+ 6.85 \cos(\Omega+2D-g) + 6.85 \cos(\Omega-2D+g) + 7.090 \cos(2L-\Omega) +$$

$$+ 5.802 \cos(2\omega+\Omega).$$

Die in diesem Artikel gegebenen Entwickelungen können noch dazu benutzt werden, auch die in den Gleichungen (33^1) und (33^2) vorkommenden Ausdrücke $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2\, l_\odot$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot$ als Funktionen der Zeit darzustellen; dabei kann man von allen periodischen Störungen der Erdbahn absehen und letztere als elliptisch betrachten. Wenn unter dieser Voraussetzung Δ die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, e' die Exzentrizität der Erdbahn und g' die mittlere Anomalie der Sonne bedeutet, so hat man

$$\frac{\Delta}{r_\odot} = 1 + e' \cos g' + e'^2 \cos 2g'.$$

Aus der Vergleichung dieser Relation mit (49) folgt, daß, wenn man in der Gleichung (50), beziehungsweise in den Ausdrücken für die Koeffizienten dieser Gleichung, e_1, e_2, g der Reihe nach mit e', e'^2, g' vertauscht und außerdem $\sigma_2 = \tau_2 = \omega_3 = 0$ setzt, man die Entwickelung für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3$ erhält. Es ergibt sich also bis auf Glieder von der Ordnung e'^2 genau

$$\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2} e'^2 + 3\, e' \cos g' + \frac{9}{2} e'^2 \cos 2\, g'$$

Wird t von 1850.0 an gezählt und als Einheit von t ein julianisches Jahrhundert gewählt, so ist nach Newcomb

$$e' = 0.01677 - 0.000042\, t,$$

oder, wie zur Abkürzung gesetzt werden soll

$$e' = e'_0 + e'_1 t.$$

Es genügt nun, das säkulare Glied von e' nur bei der Berechnung von $\frac{3}{2}e'^2$ in Rechnung zu ziehen; setzt man dementsprechend

$$\alpha'_0 = 1 + \frac{3}{2}e'^2_0 \qquad \log \alpha'_0 = 0.00018$$

$$\alpha'_1 = 3\,e'_1 e'_0 \qquad \log \alpha'_1 = 4_n 325$$

$$\beta'_1 = 3\,e'_0 \qquad \log \beta'_1 = 8.7016$$

$$\beta'_2 = \frac{9}{2}e'^2_0 \qquad \log \beta'_2 = 7.102,$$

so wird

(62)
$$\left(\frac{\Delta}{r_{\odot}}\right)^3 = \alpha'_0 + \alpha'_1\,t + \beta'_1 \cos g' + \beta'_2 \cos 2g'.$$

Wenn wieder L die mittlere Länge der Sonne bedeutet und die Bezeichnungen eingeführt werden

$$k'_1 = 4e'_0 \qquad \log k'_1 = 8.8266$$

$$k'_2 = \frac{5}{2}e'^2_0 \qquad \log k'_2 = 6.847$$

so ist der Theorie der elliptischen Bewegung zufolge

$$2\,l_{\odot} = 2L + k'_1 \sin g' + k'_2 \sin 2\,g'.$$

Ebendieselbe Gleichung erhält man, wenn man in der Gleichung (51) c, k_1, k_2, g der Reihe nach mit L, k'_1, k'_2, g' vertauscht und außerdem $\lambda_2 = \mu_2 = \mu_3 = \nu_3 = 0$ setzt. Mit Hülfe dieser Substitutionen kann man also auch aus der Gleichung (55) unmittelbar die entsprechende für $\sin 2\,l_{\odot}$ erhalten. Geht man auf die Bedeutung der in (55) auftretenden Koeffizienten zurück und setzt

$$s'_0 = 1 - \frac{1}{4}k'^2_1 \qquad \log s'_0 = 9.99951$$

$$s'_1 = \frac{1}{2}k'_1 \qquad \log s'_1 = 8.5256$$

$$t'_1 = \frac{1}{2}k'_1 = s'_1 \qquad \log t'_1 = 8.5256,$$

so erhält man mit Vernachlässigung der von $2L \pm 2g'$ abhängigen Glieder

(63)
$$\sin 2\,l_{\odot} = \underset{9992.\bar{8}}{s'_0 \sin 2L} + \underset{336}{s'_1 \sin (2L + g')} - \underset{336}{t'_1 \sin (2L - g')}.$$

Diese Gleichung ist mit der Gleichung (62) zu multiplizieren. In (63) sind bereits unterhalb der Koeffizienten ihre mit α'_0 multiplizierten Zahlenwerte, ausgedrückt in Einheiten der vierten Dezimale, angegeben. Die durch die Multiplikation des Gliedes $\alpha'_1 t$ mit der Gleichung (63) entstehenden Produkte können vernachlässigt werden. Weiterhin erhält man

$$\beta'_1 \cos g' \sin 2\,l_{\odot} = \underset{251}{\frac{1}{2}\beta'_1 s'_0 \sin (2L + g')} + \underset{251}{\frac{1}{2}\beta'_1 s'_0 \sin (2L - g')}$$

$$\beta'_2 \cos 2g' \sin 2\,l_{\odot} = \underset{0}{-\frac{1}{2}\beta'_2 t'_1 \sin (2L + g')} + \underset{0}{\frac{1}{2}\beta'_2 s'_1 \sin (2L - g')}.$$

Die Summe aus den beiden letzten Gleichungen und der mit α_0' multiplizierten Gleichung (63) stellt den Ausdruck für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2\, l_\odot$ dar, und zwar ergibt sich mit Hülfe der unterhalb der Koeffizienten der drei letzten Gleichungen stehenden Zahlen

$$(64)\qquad \left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2 l_\odot = 0.99928 \sin 2L + 0.0587 \sin (2L + g') - 0.0085 \sin (2L - g').$$

Ersetzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung die sin durch cos, so erhält man den Ausdruck für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \cos 2\, l$. Endlich ist

$$\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \cos 2\, l_\odot.$$

Unter Anwendung der Formeln (64) und (62) sowie der (64) entsprechenden Formel für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \cos 2\, l_\odot$ ergeben sich demnach die folgenden Gleichungen, in denen die Koeffizienten logarithmisch angesetzt sind

$$(65^1)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2 l_\odot = 9.69866 \sin 2L + 8.4676 \sin (2L + g') + 7_n628 \sin (2L - g').$$

$$(65^2)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot = 9.39812 + 3_n723\, t + 8.0995 \cos g' + 6.50 \cos 2g' +$$

$$+ 9_n39763 \cos 2L + 8_n1666 \cos (2L + g') + 7.327 \cos (2L - g').$$

8. Die in den zwei letzten Artikeln gewonnenen Formeln gestatten, den Differentialgleichungen (33) eine zur Integration geeignete Gestalt zu geben. Es soll jetzt diese Rechnung durchgeführt und sodann die Integration der erhaltenen Differentialgleichungen bewerkstelligt werden. Den Differentialgleichungen (33) gemäß ist die Gleichung (61^1) mit der ersten der Gleichungen (43) zu multiplizieren, ferner die Gleichung (61^2) mit der zweiten der Gleichungen (43), u. s. w. Diese Rechnung wird übersichtlicher, wenn man sie in zwei Teilen ausführt, und zwar folgendermaßen. Die Glieder, welche aus der Multiplikation mit den Gleichungen (43) und mit der zweiten der Gleichungen (46) hervorgehen, sollen einstweilen ganz vernachlässigt werden, oder es soll, was auf dasselbe herauskommt,

$$\frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = 0, \qquad \frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = 0, \qquad \sin a \cos 2\varepsilon = 0$$

gesetzt werden.

In den Gleichungen (44) und (45) berücksichtige man zunächst nur folgende Glieder

$$\frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} \qquad \log \frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} = 0.26356$$

$$\frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} \qquad \log \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} = 0.23447$$

$$\cos a \sin \varepsilon = \sin \varepsilon_0 \qquad \log \sin \varepsilon_0 = 9.59998$$

$$\cos a \cos \varepsilon = \cos \varepsilon_0 \qquad \log \cos \varepsilon_0 = 9.96253.$$

Ferner berücksichtige man in der ersten der Gleichungen (46) nur das Hauptglied und setze also

$$\sin a \sin 2\varepsilon = a_1 \sin 2\varepsilon_0.$$

Nach (38) ist $a_1 = p_1 t : \sin \varepsilon_0$. Drückt man $p_1 = 5''341$ in Teilen des Radius aus, so wird

$$\log \frac{a_1 \sin 2\varepsilon_0}{t} = 5.6767.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$(66)\qquad -\frac{d\psi'_c}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c)\frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}\right\}$$

$$(67)\qquad -\frac{d\psi_\odot}{dt} = \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot \frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}$$

$$(68)\qquad \frac{d\varepsilon'_c}{dt} = -\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\left\{\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \sin\varepsilon_0 + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c \cos \varepsilon_0 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c)\; a_1 \sin 2\varepsilon_0\right\}$$

$$(69)\qquad \frac{d\varepsilon'_\odot}{dt} = -\frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot \sin\varepsilon_0 - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot\right] a_1 \sin 2\varepsilon_0\right\},$$

so werden die Gleichungen (33)

$$(70)\qquad \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{d\psi_c}{dt} + \frac{d\psi_\odot}{dt} + \delta\frac{d\psi_c}{dt} + \delta\frac{d\psi_\odot}{dt} \\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{d\varepsilon'_c}{dt} + \frac{d\varepsilon'_\odot}{dt} + \delta\frac{d\varepsilon'_c}{dt} + \delta\frac{d\varepsilon'_\odot}{dt}, \end{aligned}$$

wo die Zusatzglieder $\delta\frac{d\psi_c}{dt}, \ldots, \delta\frac{d\varepsilon'_\odot}{dt}$ aus der Multiplikation der vorhin vernachlässigten Glieder der Gleichungen (43) bis (46) in die Gleichungen (61^1) bis (61^4), beziehungsweise in (65^1) und (65^2) hervorgehen.

Man führe jetzt in die Gleichungen (66) bis (69) die in (61^1) bis (61^4) sowie in (65^1) und (65^2) gegebenen Werte von $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b^c$ u. s. w. ein. In dem letzten Gliede des Klammerausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (68) beziehungsweise der Gleichung (69) genügt es, nur den konstanten Teil von $\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c)$ beziehungsweise von $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot$ zu berücksichtigen; ferner soll in der Gleichung (65^2) das Glied $3_n723\, t$ vorläufig vernachlässigt werden. Man erhält dann

$$(71)\qquad -\frac{d\psi_c}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\left\{9.65827 + 8.8722 \cos g + 7.784 \cos 2g + 8.081 \cos 2D + \right.$$
$$+ 8.154 \cos(2D-g) + 7.25 \cos(2D+g) + 6.86 \cos(2D-2g) +$$
$$+ 9_n6563 \cos 2c + 8_n9388 \cos[2c+g] + 8.109 \cos[2c-g] +$$
$$+ 8_n063 \cos[2c+2g] + 8_n143 \cos[2c+2D] + 6_n36 \cos[2c-2D] +$$
$$+ 8_n215 \cos[2c+2D-g] + 7.523 \cos[2c-2D+g] +$$
$$+ 7_n517 \cos[2c+2D+g] + 7.122 \cos[2c-2D+2g] +$$

$$+ 7.740 \cos [2c - 2\Omega] + 7_n268 \cos 2\Omega + 8_n8818 \cos [2c - \Omega] +$$
$$+ 8_n1643 \cos [2c + g - \Omega] + 7.334 \cos [2c - g - \Omega] +$$
$$+ 7_n288 \cos [2c + 2g - \Omega] + 7_n368 \cos [2c + 2D - \Omega] +$$
$$+ 7_n440 \cos [2c + 2D - g - \Omega] + 8.88643 \cos \Omega + 7.799 \cos (\Omega + g) +$$
$$+ 7.799 \cos (\Omega - g) + 7.00 \cos (\Omega + 2D) + 7.00 \cos (\Omega - 2D) +$$
$$+ 7.08 \cos (\Omega + 2D - g) + 7.08 \cos (\Omega - 2D + g) +$$
$$+ 7.324 \cos (2L - \Omega) + 6.036 \cos (2\omega + \Omega) \Big\}$$

(72) $$-\frac{d\psi_\odot}{dt} = \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3} \frac{C-A}{Cn} \Big\{ 9.66168 + 8.3631 \cos g' + 6.76 \cos 2g' + 9_n66119 \cos 2L +$$
$$+ 8_n4302 \cos (2L + g') + 7.591 \cos (2L - g') \Big\}$$

(73) $$\frac{d\varepsilon'_{c}}{dt} = -\frac{3k^2 M_{c}}{H^3} \frac{C-A}{Cn} \Big\{ 5_n0714t + 9.2937 \sin 2c + 8.5762 \sin [2c + g] +$$
$$+ 7_n746 \sin [2c - g] + 7.700 \sin [2c + 2g] +$$
$$+ 7.780 \sin [2c + 2D] + 6.00 \sin [2c - 2D] +$$
$$+ 7.852 \sin [2c + 2D - g] + 7_n160 \sin [2c - 2D + g] +$$
$$+ 7.154 \sin [2c + 2D + g] + 6_n759 \sin [2c - 2D + 2g] +$$
$$+ 6.9054 \sin 2\Omega + 8.6098 \sin [2c - \Omega] +$$
$$+ 7.892 \sin [2c + g - \Omega] + 7_n062 \sin [2c - g - \Omega] +$$
$$+ 7.017 \sin [2c + 2g - \Omega] + 7.097 \sin [2c + 2D - \Omega] +$$
$$+ 7.169 \sin [2c + 2D - g - \Omega] + 8_n61449 \sin \Omega +$$
$$+ 7_n528 \sin (\Omega + g) + 7_n528 \sin (\Omega - g) +$$
$$+ 6_n73 \sin (\Omega + 2D) + 6_n73 \sin (\Omega - 2D) +$$
$$+ 6_n81 \sin (\Omega + 2D - g) + 6_n81 \sin (\Omega - 2D + g) +$$
$$+ 7_n053 \sin (2L - \Omega) + 5_n765 \sin (2\omega + \Omega) \Big\}$$

(74) $$\frac{d\varepsilon'_{\odot}}{dt} = -\frac{3k^2 M_{\odot}}{\Delta^3} \frac{C-A}{Cn} \Big\{ 5_n0749t + 9.29864 \sin 2L +$$
$$+ 8.0676 \sin (2L + g') + 7_n228 \sin (2L - g') \Big\}.$$

Nimmt man an, daß die Faktoren $\frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3} \frac{C-A}{Cn}$ und $\frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn}$ bekannt wären, so würde die Integration der vier vorhergehenden Differentialgleichungen keine Schwierigkeiten bereiten. Denn, wenn man sich in diesen Gleichungen die Logarithmen durch ihre Numeri ersetzt denkt, so haben die Glieder auf der rechten Seite sämtlich eine der drei Formen

$$(D) \qquad \alpha, \qquad \beta t, \qquad \gamma \sin (F_0 + f_0 t), \qquad \delta \cos (G_0 + g_0 t),$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Teilen des Radius ausgedrückte Zahlengrößen, und f_0 und g_0 die Änderungen von F_0 und G_0 im Laufe der Zeiteinheit bedeuten; die entsprechenden Integrale lauten also

$$(J) \qquad \alpha t, \qquad \frac{1}{2}\beta t^2, \qquad -\frac{\gamma}{f_0} \cos (F_0 + f_0 t), \qquad \frac{\delta}{g_0} \sin (G_0 + g_0 t).$$

Sind auch f_0 und g_0 in Teilen des Radius gegeben, und soll das Resultat der Integration in Bogensekunden ausgedrückt erhalten werden, so muß man die vorigen Integrale noch durch arc 1″ dividieren. Nach den Tafeln von Hansen und Leverrier hat man aber für die Produkte aus arc 1″ und den in Teilen des Radius ausgedrückten, auf das als Zeiteinheit gewählte julianische Jahrhundert bezogenen Werten der mittleren Bewegung von $g, g', \ldots 2\omega$

Argument	Mittl. Beweg. × arc 1″	Argument	Mittl. Beweg. × arc 1″
g . . .	+ 0.0403786	$2L$ . . .	+ 0.0060925
g' . .	+ 0.0030461	$2D$ . . .	+ 0.07535334
$2c$ . . .	+ 0.0814458	Ω . . .	− 0.00016366
		2ω . . .	+ 0.00101594.

Es ist jetzt zu zeigen, in welcher Weise sich die Faktoren $\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}$ und $\frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}$ bestimmen lassen. Wie man mit Hilfe der für die mittlere Bewegung der Argumente $g, g' \ldots 2\omega$ gegebenen, beziehungsweise der aus ihnen abgeleiteten Werte sieht, ist das Integral aus dem den Faktor sin Ω enthaltenden Gliede der Gleichung (73) weit größer als alle aus den übrigen Gliedern dieser Gleichung hervorgehenden Integrale. Das Integral lautet

$$\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\frac{[8.61449]}{[6.21394]}\cos\Omega\,,$$

wo die in Klammern gesetzten Zahlen Logarithmen bedeuten. Werden die Logarithmen durch die ihnen entsprechenden Numeri ersetzt, so folgt aus dem vorhin Gesagten, daß das Integral in Sekunden ausgedrückt erhalten wird, und zwar ergibt sich

$$\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\,251''\!.506\cos\Omega\,.$$

Der Koeffizient von cos Ω läßt sich aber auch direkt aus den Beobachtungen ableiten. Als wahrscheinlichsten Wert desselben nimmt man gegenwärtig 9″21 an; somit wird

$$\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\,251''\!.506 = 9''\!.21\,,$$

also

$$\log\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn} = 8.56371\,.$$

Dieser Logarithmus ist zu sämtlichen in den Klammern auf der rechten Seite der Gleichungen (71) und (73) gegebenen logarithmischen Koeffizienten zu addieren und dann die Integration nach dem oben angegebenen Schema vorzunehmen. Bezeichnet man das Integral $\int_0^t \frac{d\varepsilon'_c}{dt}\,dt$ mit $\Delta\varepsilon_c$, so erhält man, wenn noch die Argumente $2c-2D+g$ und $2c-2D$ mit den gleichbedeutenden $2L+g$, beziehungsweise $2L$ vertauscht werden,

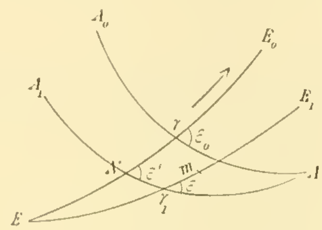
$$
\begin{aligned}
(75) \qquad -\psi_c = {} & 3438''8\,t \\
& + 0.068 \sin g \\
& + 0.003 \sin 2g \\
& + 0.006 \sin 2D \\
& + 0.015 \sin (2D-g) \\
& + 0.001 \sin (2D+g) \\
& - 0.005 \sin (2D-2g) \\
& - 0.204 \sin 2c \\
& - 0.026 \sin [2c+g] \\
& + 0.011 \sin [2c-g] \\
& - 0.003 \sin [2c+2g] \\
& - 0.003 \sin [2c+2D] \\
& - 0.001 \sin 2L \\
& - 0.005 \sin [2c+2D-g] \\
& + 0.003 \sin [2L+g] \\
& - 0.001 \sin [2c+2D+g] \\
& + 0.001 \sin [2c-2D+2g] \\
& + 0.002 \sin [2c-2\Omega] \\
& + 0.207 \sin 2\Omega \\
& - 0.034 \sin [2c-\Omega] \\
& - 0.004 \sin [2c+g-\Omega] \\
& + 0.002 \sin [2c-g-\Omega] \\
& - 0.001 \sin [2c+2D-\Omega] \\
& - 0.001 \sin [2c+2D-g-\Omega] \\
& - 17.227 \sin \Omega \\
& + 0.006 \sin (\Omega+g) \\
& - 0.006 \sin (\Omega-g) \\
& + 0.001 \sin (\Omega+2D-g) \\
& + 0.001 \sin (\Omega-2D+g) \\
& + 0.012 \sin (2L-\Omega) \\
& + 0.005 \sin (2\omega+\Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(76) \qquad \Delta\varepsilon_c = {} & + 0''0445\,t^2 \\
& + 0.088 \cos 2c \\
& + 0.011 \cos [2c+g] \\
& - 0.005 \cos [2c-g] \\
& + 0.001 \cos [2c+2g] \\
& + 0.001 \cos [2c+2D] \\
& + 0.001 \cos 2L \\
& + 0.002 \cos [2c+2D-g] \\
& - 0.001 \cos [2c-2D+g] \\
& - 0.090 \cos 2\Omega \\
& + 0.018 \cos [2c-\Omega] \\
& + 0.002 \cos [2c+g-\Omega] \\
& - 0.001 \cos [2c-g-\Omega] \\
& + 9.210 \cos \Omega \\
& - 0.003 \cos [\Omega+g] \\
& + 0.003 \cos [\Omega-g] \\
& - 0.001 \cos [\Omega+D2-g] \\
& + 0.001 \cos [\Omega-2D+g] \\
& - 0.007 \cos [2L-\Omega] \\
& - 0.003 \cos (2\omega+\Omega)
\end{aligned}
$$

Die Bestimmung des Faktors $\frac{3k^2M_c}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ ist ebenfalls nur mit Hilfe der Beobachtungen auszuführen. Zum Verständnis sei Folgendes bemerkt. Die vorhin abgeleiteten Formeln für $-\psi_c$ und $\Delta\varepsilon_c$ zeigen, daß die Lage des Äquators in Bezug auf die feste Ekliptik Veränderungen unterworfen ist, welche teils der Zeit oder deren Quadrat proportional, teils periodisch sind. Da die Gleichungen (72) und (74) ganz ähnlich gebaut sind wie die zur Bestimmung von $-\psi_c$ und $\Delta\varepsilon_c$ dienenden Gleichungen (71) und (73), so müssen $-\psi_{\odot}$ und $\Delta\varepsilon_{\odot}$ aus ebensolchen Gliedern zusammengesetzt sein wie $-\psi_c$ und $\Delta\varepsilon_c$. Es sei nun AA_1 die Lage, welche der Äquator zur Zeit t haben würde, wenn die periodischen Glieder in ψ und $\Delta\varepsilon$ nicht vorhanden wären;

ferner stelle AA_0 die derselben Annahme entsprechende Lage des Äquators zur Zeit $t = 0$ dar. Endlich möge die Lage der Ekliptik zur Zeit $t = 0$ beziehungsweise $t = t$ durch den größten Kreis EE_0 bezie-

Fig. 7.



hungsweise EE_1 angegeben werden; der Pfeil zeige die Richtung der Bewegung der Erde in ihrer Bahn an. Nach den früheren Bezeichnungen (p. 15)[1] ist dann $E\Upsilon = 180° - \Pi$, $E\Upsilon_1 = b$, somit $E\Upsilon - E\Upsilon_1 = 180° - \Pi - b$, oder nach Einsetzung des durch die Gleichungen (40) und (39) bestimmten Wertes von b, wobei aber b_3 wieder vernachlässigt werden kann,

$$E\Upsilon - E\Upsilon_1 = -\psi - p_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - b_2 ,$$

$$b_2 = \left(p_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{1}{4} p_1 q_1 \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \varepsilon_0\right) t^2 - \psi q_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{p_1 \Delta \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon_0} t .$$

Der vorhin gemachten Voraussetzung gemäß sollen hier bei ψ und $\Delta\varepsilon$ nur diejenigen Glieder berücksichtigt werden, welche die Zeit oder deren Quadrat mit konstanten Koeffizienten multipliziert enthalten. Da die niedrigste Potenz von t in ψ die erste und in $\Delta\varepsilon$ die zweite ist, so ist b_2 in Bezug auf t mindestens vom zweiten Grade. Differenziert man also die Gleichung für $E\Upsilon - E\Upsilon_1$ nach t und setzt dann $t = 0$, so ergibt sich, wenn noch zur Abkürzung

$$\left[\frac{d(E\Upsilon - E\Upsilon_1)}{dt}\right]_{t=0} = l$$

geschrieben wird,

$$l = -\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0} - p_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 . \tag{77}$$

Hierin ist

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\psi_c}{dt}\right)_{t=0} + \left(\frac{d\psi_\odot}{dt}\right)_{t=0} . \tag{77¹}$$

Da von allen periodischen Gliedern abgesehen werden soll, so hat man nach (75)

$$\left(\frac{d\psi_c}{dt}\right)_{t=0} = -3438''8 . \tag{77²}$$

Der Wert von l läßt sich nur durch Beobachtungen ermitteln; Newcomb findet für den auf das julianische Jahrhundert als Zeiteinheit bezogenen Wert von l

$$l = 5024''64.$$

[1] Dort ist noch nicht angegeben, daß AA_0 (Fig. 5, p. 13) die Lage des Äquators zur Zeit $t = 0$ mit Vernachlässigung der periodischen Glieder bedeuten soll; diese Definition wird erst jetzt verständlich.

Aus den Gleichungen (77), (77[1]) und (77[2]) folgt somit

$$-\left(\frac{d\psi_{\odot}}{dt}\right)_{t=0} = 1585''84 + p_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 = 1598''15$$

Die Gleichung (72) gibt aber, wenn die periodischen Glieder vernachlässigt werden und das konstante Glied durch *arc* 1″ dividiert wird,

$$-\left(\frac{d\psi_{\odot}}{dt}\right)_{t=0} = \frac{3k^2M_{\odot}}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}\,94648''.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\log \frac{3k^2M_{\odot}}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn} = 8.22751\,.$$

Dieser Logarithmus ist nun zu allen in den Klammerausdrücken auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (72) und (74) gegebenen logarithmischen Koeffizienten zu addieren. Darauf erhält man durch Integration

$$(78)\qquad \begin{aligned} -\psi_{\odot} = {} & 1598''15\,t \\ & + 0.128 \sin g' \\ & + 0.002 \sin 2g' \\ & - 1.270 \sin 2L \\ & - 0.050 \sin (2L + g') \\ & + 0.021 \sin (2L - g') \end{aligned}$$

$$(79)\qquad \begin{aligned} \Delta\varepsilon_{\odot} = {} & + 0''0207\,t^2 \\ & + 0.551 \cos 2L \\ & + 0.022 \cos (2L + g') \\ & - 0.009 \cos (2L - g') \end{aligned}$$

Jetzt erübrigt nur mehr die Berechnung der in (70) mit $\delta\,\frac{d\psi_c}{dt}, \ldots$ bezeichneten Zusatzglieder beziehungsweise der ihnen entsprechenden Korrektionsglieder der Integrale (75), (76), (78) und (79); dazu aber bedarf man der Kenntnis genäherter Werte von ψ und $\Delta\varepsilon$. Die Summe aus den Gleichungen (75) und (78) stellt einen Näherungswert von ψ dar, die Summe aus (76) und (79) einen Näherungswert von $\Delta\varepsilon$. Berücksichtigt man nur die Hauptglieder, so folgt

$$\psi = -5036''95\,t + 17''23 \sin \Omega + 1''27 \sin 2L$$

$$\Delta\varepsilon = 0''065\,t^2 + 9''21 \cos \Omega\,.$$

Mit Hilfe dieser Werte ergibt sich aus den Gleichungen (43) bis (46), wenn statt der in Bogensekunden ausgedrückten Koeffizienten ihre Logarithmen gesetzt werden,

$$\frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = 1.12764t + 0_n37786t^2 + 7.992t \sin \Omega + 7_n140t \cos \Omega + 6.86t \sin 2L$$

$$\frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = 1.49019t + 0_n73889t^2 + 8.3547\,t \sin \Omega + 7_n843t \cos \Omega + 7.224t \sin 2L$$

(80[1])

$$\frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} = {}^{*}\frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} + 2_n20610\,t + 9_n539\,t^2 + 0_n8653 \cos \Omega + 7.185t \sin \Omega + 8.5037t \cos \Omega$$

$$\frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} = {}^{*}\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} + 7.489 + 2.23519t + 9_n415t^2 + 1_n84660 \cos \Omega + 7.489 \cos 2\Omega +$$

$$+ 7_n214t \sin \Omega + 7_n523t \cos \Omega$$

$$
(80^2)\quad
\begin{aligned}
\cos a \sin \varepsilon &= {}^{*}\sin \varepsilon_0 + 1_n 63313\, t + 8_n 021\, t^2 + 0.9270 \cos \Omega + 6.61\, t \sin \Omega + 6.92\, t \cos \Omega \\
\cos a \cos \varepsilon &= {}^{*}\cos \varepsilon_0 + 1.27058\, t + 7_n 095\, t^2 + 0_n 5644 \cos \Omega + 6_n 25\, t \sin \Omega + 7.283\, t \cos \Omega \\
\sin a \sin 2\varepsilon &= {}^{*}a_1 \sin 2\varepsilon_0 + 0_n 24116\, t^2 + 7.856\, t \sin \Omega + 6_n 28\, t \cos \Omega + 6.72\, t \sin 2L \\
\sin a \cos 2\varepsilon &= 0.96211\, t + 0_n 20986\, t^2 + 7.827\, t \sin \Omega + 7_n 260\, t \cos \Omega + 6.70\, t \sin 2L.
\end{aligned}
$$

Die vorigen acht Gleichungen sind mit den nach Maßgabe von (33^1) und (33^2) ihnen entsprechenden Gleichungen (61^1) bis (61^4) beziehungsweise (65^1) und (65^2) zu multiplizieren. Wie aber die Gleichungen (66) bis (69) zeigen, ist die Multiplikation mit den in den Gleichungen (80) mit einem Sternchen versehenen Gliedern bereits ausgeführt worden; es sind also nur noch diejenigen Produkte in Rechnung zu ziehen, welche bei Berücksichtigung der übrigen Glieder der Gleichungen (80) entstehen. Außerdem soll auch die Multiplikation des Gliedes $3_n 723\, t$ der Gleichung (65^2) mit der 3ten und 7ten der Gleichungen (80) nachgeholt werden.[1] Der größte Teil der bisher vernachlässigten Produkte ist ohne Einfluß auf das Endresultat; die allein zu berücksichtigenden liefern für die in den Gleichungen (70) mit $\delta \frac{d\psi_c}{dt}, \ldots$ bezeichneten Zusatzglieder die folgenden Ausdrücke, in denen statt der in Bogensekunden ausgedrückten Koeffizienten ihre Logarithmen mitgeteilt sind.

$$
(81)\quad -\delta \frac{d\psi_c}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn} \Big[1_n 60082\, t + 8_n 934\, t^2 + 0_n 2591 \cos \Omega + 0_n 198 \cos 2\Omega + {} + 0.8876\, t \cos \Omega + 0_n 1420\, t \sin \Omega \Big]
$$

$$
(82)\quad -\delta \frac{d\psi_\odot}{dt} = \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3} \frac{C-A}{Cn} \Big[1_n 60638\, t + 8_n 937\, t^2 + 0_n 2634 \cos \Omega \Big]
$$

$$
(83)\quad \delta \frac{d\varepsilon'_c}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn} \Big[9_n 6359\, t^2 + 9.6140\, t \cos \Omega + 9.9235\, t \sin \Omega \Big]
$$

$$
(84)\quad \delta \frac{d'\varepsilon_\odot}{dt} = \frac{3k^2 M_\cdot}{\Delta^3} \frac{C-A}{Cn}\, 9_n 6393\, t^2.
$$

Setzt man $\Omega = \Omega_0 + \sigma t$, wo σ die mittlere Bewegung des Mondknotens in der Zeiteinheit bezeichnet und bedeutet m einen konstanten Koeffizienten, so ist

$$
m \int t \cos \Omega = \frac{mt}{\sigma} \sin \Omega + \frac{m}{\sigma^2} \cos \Omega
$$

$$
m \int t \sin \Omega = -\frac{mt}{\sigma} \cos \Omega + \frac{m}{\sigma^2} \sin \Omega.
$$

Die den logarithmischen Koeffizienten der Differentialgleichungen (81) bis (84) entsprechenden Numeri geben Bogensekunden an; um also auch bei der Anwendung der zwei vorigen Integralformeln die Koeffizienten in Bogensekunden zu erhalten, ist für σ sein in Teilen des Radius ausgedrückter Wert zu substituieren. Dieselbe Bemerkung gilt für die in (81) bis (83) mit $\cos \Omega$ und $\cos 2\Omega$ multiplizierten Glieder. Nach Hansen hat man aber

$$
\sigma = -\frac{0.00016366}{\text{arc } 1''}, \quad \log \sigma = 1_n 5284.
$$

---

[1] Siehe p. 33, Z. 7 v. u. Bei der Multiplikation dieses Gliedes mit $\sin 2\varepsilon_0$: $\sin \varepsilon_0$ ist letzterer Quotient in Bogensekunden auszudrücken.

Wird jetzt noch von den früher für $\log \frac{3\,k^2 M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ und $\log \frac{3\,k^2 M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ gefundenen Werten Gebrauch gemacht, so erhält man als Integrale der Differentialgleichungen (81) bis (84)

(85) $-\delta\psi_c = -0''7303\,t^2 - 0''0011\,t^3 + 0''002 \sin\Omega + 0''001 \sin 2\Omega - 0''008\,t\sin\Omega - 0''002\,t\cos\Omega$

(86) $-\delta\psi_\odot = -0\cdot3411\,t^2 - 0\cdot0005\,t^3 + 0\cdot001 \sin\Omega$

(87) $\delta\Delta\varepsilon_c = -0\cdot0053\,t^3 + 0\cdot001\,t\cos\Omega$

(88) $\delta\Delta\varepsilon_\odot = -0\cdot0025\,t^3.$

Die Summen aus den Gleichungen (75), (78), (85), (86) einerseits und den Gleichungen (76), (79), (87), (88) andrerseits stellen die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen (33) dar. Läßt man alle Glieder unberücksichtigt, deren Koeffizienten kleiner als $0''002$ sind, mit Ausnahme des von $t\cos\Omega$ abhängigen, so erhält man

(89)
$$\begin{aligned}
-\psi = {} & 5036''95\,t - 1''071\,t^2 - 0''002\,t^3 - \\
& - 17.224 \sin\Omega \\
& - 0.008\,t \sin\Omega \\
& - 0.002\,t \cos\Omega \\
& - 1.271 \sin 2L \\
& + 0.208 \sin 2\Omega \\
& - 0.204 \sin 2c \\
& + 0.128 \sin g' \\
& + 0.068 \sin g \\
& - 0.050 \sin [2L+g'] \\
& - 0.034 \sin [2c-\Omega] \\
& - 0.026 \sin [2c+g] \\
& + 0.021 \sin [2L-g'] \\
& + 0.015 \sin [2D-g] \\
& + 0.012 \sin [2L-\Omega] \\
& + 0.011 \sin [2c-g] \\
& + 0.006 \sin 2D \\
& + 0.006 \sin [\Omega+g] \\
& - 0.006 \sin [\Omega-g] \\
& + 0\cdot005 \sin [2\omega+\Omega] \\
& - 0.005 \sin [2c+2D-g] \\
& - 0.005 \sin [2D-2g] \\
& - 0.004 \sin [2c+g-\Omega] \\
& - 0.003 \sin [2c+2D] \\
& + 0.003 \sin 2g \\
& - 0.003 \sin [2c+2g] \\
& + 0.003 \sin [2L+g] \\
& + 0.002 \sin [2c-2\Omega] \\
& + 0.002 \sin [2c-g-\Omega] \\
& + 0.002 \sin 2g'
\end{aligned}$$

(90)
$$\begin{aligned}
\varepsilon' = \varepsilon_0 & + 0''065\,t^2 - 0''008\,t^3 + \\
& + 9.210 \cos\Omega \\
& + 0.001\,t \cos\Omega \\
& + 0.552 \cos 2L \\
& - 0.090 \cos 2\Omega \\
& + 0.088 \cos 2c \\
& + 0.022 \cos [2L+g'] \\
& + 0.018 \cos [2c-\Omega] \\
& + 0.011 \cos [2c+g] \\
& - 0.009 \cos [2L-g'] \\
& - 0.007 \cos [2L-\Omega] \\
& - 0.005 \cos [2c-g] \\
& - 0.003 \cos [\Omega+g] \\
& + 0.003 \cos [\Omega-g] \\
& - 0.003 \cos [2\omega+\Omega] \\
& + 0.002 \cos [2c+2D-g] \\
& + 0.002 \cos [2c+g-\Omega]
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (89) und (90) bestimmen direkt nur die Lage des Äquators mit Bezug auf die Ekliptik der Epoche 1850·0; sie ermöglichen es aber, auch diejenigen Formeln abzuleiten, welche für

irgend eine Zeit die Lage des Äquators gegen die jeweilige Ebene der Ekliptik festlegen. Trägt man nämlich auf der beweglichen Ekliptik EE_1 (Fig. 7, p. 37) von E aus in der Richtung nach E_1 hin den Bogen $Em = E\Upsilon$ ab, so gibt der Abstand des beweglichen Äquinox Υ_1 von m an, um wie viel sich der Frühlings-Tag- und Nachtgleichepunkt innerhalb der Zeit t auf der beweglichen Ekliptik verschoben hat; der Abstand $\Upsilon_1 m$ in Verbindung mit dem Winkel $E_1\Upsilon_1 A = \varepsilon$ bestimmt die Lage des Äquators gegen die bewegliche Ekliptik. Es ist aber $\Upsilon_1 m = E\Upsilon - E\Upsilon_1$, und die Differenz $E\Upsilon - E\Upsilon_1$ ist, wie schon oben (p. 37) bemerkt, gleich $180° - \Pi - b$. Ferner hat man den Gleichungen (40) und (39) zufolge, wenn b_3 mitgenommen wird und für p_1, p_2, q_1, q_2, ε_0 ihre Zahlenwerte eingesetzt werden,

$$(91)\qquad b = 180° - \Pi + \psi + 12''31\,t + 0''453\,t^2 + [6.71873-10]\,t\psi + \\ + [6_n2132-10]\,t\Delta\varepsilon + [3_n5185-10]t^2\psi + [5_n4747-10]t\psi^2,$$

wo die in Klammern stehenden Zahlen Logarithmen bedeuten, deren Numeri in Teilen des Radius ausgedrückt sind. Wenn man jetzt noch in den vier letzten Gliedern der vorigen Gleichung an Stelle von ψ und $\Delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon_0$ ihre Werte aus (89) und (90) setzt, so ergibt sich für den Abstand $\Upsilon_1 m$, der mit Λ bezeichnet werden möge,

$$\Lambda = -\psi - 12''31\,t + 2''183\,t^2 + 0''001\,t^3 - 0''009\,t\sin\Omega + 0''002\,t\cos\Omega.$$

Der Winkel ε ist durch die Gleichung (41) gegeben, und zwar hat man, wenn für p_1, p_2, q_1, q_2, ψ ihre Werte eingeführt werden,

$$\varepsilon = \varepsilon' - 46''838\,t - 0''074\,t^2 + 0''009\,t^3,$$

wo für ε' sein Wert aus (90) zu substituieren ist. Führt man diese Substitution aus und setzt auch in der vorigen Gleichung für Λ an Stelle von $-\psi$ seinen durch (89) bestimmten Wert ein, so ergibt sich

$$(92)\qquad \begin{aligned} \Lambda = 5024''64\,t &+ 1''112\,t^2 - 0''001\,t^3 \\ &- 17.224 \sin\Omega \\ &- 0.017\,t \sin\Omega \\ &- 1.271 \sin 2L \\ &+ 0.208 \sin 2\Omega \\ &- 0.204 \sin 2c \\ &+ 0.128 \sin g' \\ &+ 0.068 \sin g \\ &- 0.050 \sin [2L+g'] \\ &- 0.034 \sin [2c-\Omega] \\ &- 0.026 \sin [2c+g] \\ &+ 0.021 \sin [2L-g'] \\ &+ 0.015 \sin [2D-g] \\ &+ 0.012 \sin [2L-\Omega] \\ &+ 0.011 \sin [2c-g] \\ &+ 0.006 \sin 2D \\ &+ 0.006 \sin [\Omega+g] \\ &- 0.006 \sin [\Omega-g] \\ &+ 0.005 \sin [2\omega+\Omega] \end{aligned}$$

$$(93)\qquad \begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_0 - 46''838\,t &- 0''009\,t^2 + 0''001\,t^3 + \\ &+ 9.210 \cos\Omega \\ &+ 0.001\,t \cos\Omega \\ &+ 0.552 \cos 2L \\ &- 0.090 \cos 2\Omega \\ &+ 0.088 \cos 2c \\ &+ 0.022 \cos [2L+g'] \\ &+ 0.018 \cos [2c-\Omega] \\ &+ 0.011 \cos [2c+g] \\ &- 0.009 \cos [2L-g'] \\ &- 0.007 \cos [2L-\Omega] \\ &- 0.005 \cos [2c-g] \\ &- 0.003 \cos [\Omega+g] \\ &+ 0.003 \cos [\Omega-g] \\ &- 0.003 \cos [2\omega+\Omega] \\ &+ 0.002 \cos [2c+2D-g] \\ &+ 0.002 \cos [2c+g-\Omega] \end{aligned}$$

folgende Seite)

$$
\begin{aligned}
&- 0''.005 \sin [2c + 2D - g] \\
&- 0.005 \sin [2D - 2g] \\
&- 0.004 \sin [2c + g - \Omega] \\
&- 0.003 \sin [2c + 2D] \\
&+ 0.003 \sin 2g \\
&- 0.003 \sin [2c + 2g] \\
&+ 0.003 \sin [2L + g] \\
&+ 0.002 \sin [2c - 2\Omega] \\
&+ 0.002 \sin [2c - g - \Omega] \\
&+ 0.002 \sin 2g'
\end{aligned}
$$

Für die Reduktion der Beobachtungen ist auch die Kenntnis des in Fig 5. (p. 13 [401]) mit $N\Upsilon_1 = a$ bezeichneten Bogens von Wichtigkeit. Der Wert von a ist durch die Gleichungen (38) und (40) bestimmt; unter Berücksichtigung von a_3 und mit Benutzung der Zahlenwerte von p_1, p_2, q_1, q_2 und ε_0 erhält man

$$
(94) \qquad a = 13''.417 t + 0''.493 t^2 + [6.75619-10]\, t\psi + \\
+ [6_n1758-10]\, t\Delta\varepsilon + [3_n5873-10]\, t^2\psi + [5_n5122-10]\, t\psi^2
$$

wo die in Klammern gesetzten Zahlen Logarithmen bedeuten, deren Numeri in Teilen des Radius ausgedrückt sind. Werden in (94) für ψ und $\Delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon_0$ ihre Werte aus (89) und (90) substituiert, so ergibt sich

$$
(95) \qquad a = 13''.417\, t - 2''.380\, t^2 - 0''.001\, t^3 + 0''.010\, t \sin\Omega - 0''.001\, t \cos\Omega .
$$

9. Die Gleichungen (89), (90), (92), (93) und (95) bestehen aus Gliedern, welche teils periodisch sind, teils die Potenzen der Zeit mit konstanten Faktoren multipliziert enthalten. Werden die Aggregate der säkularen Glieder in (89), (90), (92), (93), 95), beziehungsweise mit $(-\psi)$, (ε'), (Λ), (ε), (a) bezeichnet, so hat man

$$
(96) \qquad
\begin{aligned}
(-\psi) &= 5036''.95\, t - 1''.071\, t^2 - 0''.002\, t^3 \\
(\varepsilon') &= \varepsilon_0 + 0''.065\, t^2 - 0''.008\, t^3 \\
(\Lambda) &= 5024''.64\, t + 1''.112\, t^2 - 0''.001\, t^3 \\
(\varepsilon) &= \varepsilon_0 - 46''.838\, t - 0''.009\, t^2 + 0''.001\, t^3 \\
(a) &= 13''.417\, t - 2''.380\, t^2 - 0''.001\, t^3 .
\end{aligned}
$$

Man nennt $(-\psi)$ die Lunisolarpräzession in Länge, $(\varepsilon') - \varepsilon_0$ die Lunisolarpräzession in Schiefe, (Λ) die allgemeine Präzession in Länge, (ε) die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit $1850 + t$, (a) die Präzession durch die Planeten. Die periodischen Glieder der Gleichungen (89), (90), ... (95) bezeichnet man als Nutationsglieder.

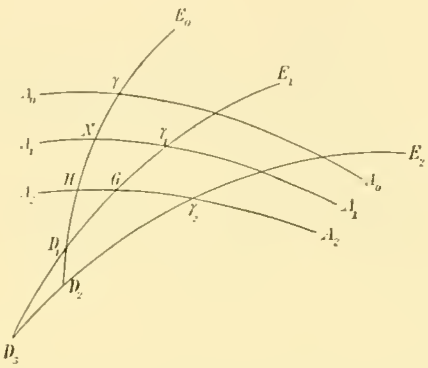
An dieser Stelle mögen auch die aus (37) und (37^a) für π und Π folgenden Formeln angegeben werden. Berechnet man nämlich mit Hilfe der genannten Gleichungen für drei verschiedene Werte von t, zum Beispiel für $t = -1, +1, +2$ die zugehörigen Werte von π und Π, so lassen sich diese durch die Formeln darstellen

$$
(97) \qquad
\begin{aligned}
\pi &= 47''.142\, t - 0''.034\, t^2 \\
\Pi &= 173^\circ\, 29'\, 40''.7 - 869''.0\, t - 0''.07\, t^2 .
\end{aligned}
$$

Hier wird also π negativ gerechnet, wenn t negativ ist.

Bisher ist die Ekliptik der Epoche 1850.0 zur Fundamentalebene gewählt und t von 1850.0 an gezählt worden. Es sollen nun die Formeln abgeleitet werden, welche an Stelle von (96) und (97) anzuwenden sind, wenn die für eine andere Epoche gültige Ekliptik als Fundamentalebene angenommen wird und man die Zeit von dieser neuen Epoche aus zählt. Um zunächst die Formel für die allgemeine Präzession zu erhalten, gehe man von Fig. 8 aus, worin die größten Kreise $A_0\,A_0$, $A_1\,A_1$, $A_2 A_2$ die Lage des

Fig. 8.



mittleren Äquators zu den Zeiten 1850.0, 1850 + t_1, 1850 + t_2 darstellen sollen, während $D_2 E_0$, $D_3 E_1$, $D_3 E_2$ die für die eben angegebenen Epochen gültige Ekliptik bezeichnen. Es ist dann $D_1\Upsilon - D_1\Upsilon_1$ die aus der dritten der Formeln (96) für $t = t_1$ folgende allgemeine Präzession bezogen auf die Ekliptik von 1850 und $D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2$ die zu suchende allgemeine Präzession für das Zeitintervall $t_2 - t_1$ bezogen auf die Ekliptik zur Zeit 1850 + t_1. Man hat aber

$$D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = D_3\,D_1 + D_1\Upsilon_1 - D_3 D_2 - D_2\Upsilon_2\,.$$

Nun ergibt sich aus den Formeln (97), daß selbst, wenn die Ekliptik $D_2\,E_2$ dem Jahre 1950 entspricht, also $t = 1$ ist, der Winkel π zwischen $D_2\,E_2$ und $D_2\,E_0$ nur $47''$ beträgt und der Bogen $D_1\,D_2 = 869''0$ ist; unter diesen Umständen kann man $D_3\,D_2 + D_2 D_1 = D_3\,D_1$, also

$$D_3\,D_1 - D_3\,D_2 = D_2\,D_1 = D_2\Upsilon - D_1\Upsilon$$

setzen. Somit wird

$$D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = D_2\Upsilon - D_2\Upsilon_2 - (D_1\Upsilon - D_1\Upsilon_1)\,.$$

Die Differenzen $D_2\Upsilon - D_2\Upsilon_2$ und $D_1\Upsilon - D_1\Upsilon_1$ sind aber mit den aus der dritten der Formeln (96) für $t = t_2 = t_1 + (t_2 - t_1)$, beziehungsweise $t = t_1$ folgenden Werten von (Λ) identisch. Bezeichnet man den für (Λ) gegebenen Ausdruck mit $f\,(t)$, so daß also

$$f\,(t) = 5024''64\,t + 1''112\,t^2 - 0\cdot 001$$

wird, und setzt

$$t_2 - t_1 = \tau,$$

so erhält man

$$D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = f(t_1 + \tau) - f\,(t_1)\,.$$

Zur Abkürzung werde nun $D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = (\Lambda)_\tau$ gesetzt; der Taylor'sche Satz gibt dann

$$\text{(98)} \qquad \begin{aligned} (\Lambda)_\tau = {} & (5024''64 + 2''224\,t_1 - 0''003\,t_1^2)\tau \\ & + (1''112 - 0''003\,t_1)\,\tau^2 - 0''001\,\tau^3. \end{aligned}$$

Für den Winkel (ε), den die irgend einer Epoche $1850 + t$ entsprechende Ekliptik mit dem für dieselbe Epoche gültigen mittleren Äquator bildet, wurde in (96) die Formel erhalten

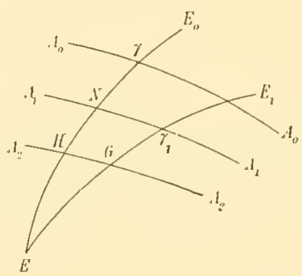
$$(\varepsilon) = \varepsilon_0 - 46''838\, t - 0''009\, t^2 + 0''001\, t^3.$$

Wird der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck mit $F(t)$ und der für die Epoche $1850 + t_2 = 1850 + t_1 + \tau$ gültige Wert von (ε) mit $(\varepsilon)_\tau$ bezeichnet, so hat man $(\varepsilon)_\tau = F(t_1 + \tau)$, also nach dem Taylor'schen Satz

(99)
$$\begin{aligned}(\varepsilon)_\tau = \varepsilon_0 & - 46''838\, t_1 - 0''009\, t_1^2 + 0''001\, t_1^3 \\ & - (46''838 + 0''018\, t_1 - 0''003\, t_1^2)\, \tau \\ & - (0''009 - 0''003\, t_1)\, \tau^2 + 0''001\, \tau^3.\end{aligned}$$

Es mögen A_0A_0, A_1A_1, A_2A_2 in Fig 9 dieselbe Bedeutung wie in Fig. 8 haben und EE_0, EE_1 die Lage der Ekliptik zu den Zeiten 1850.0 und $1850 + t_1$ darstellen. Um nun den Bogen $\Upsilon_1 G$, also die

Fig. 9.



Lunisolarpräzession in Länge für das Zeitintervall $t_2 - t_1$ bezogen auf die Ekliptik zur Zeit $1850 + t_1$ zu erhalten, gehe man von der Gleichung $\Upsilon_1 G = E\Upsilon_1 - EG$ aus. Der Bogen $E\Upsilon_1$, der früher mit b bezeichnet wurde, ergibt sich aus der Formel (91), indem man $t = t_1$ setzt und auch für ψ und $\Delta\varepsilon = (\varepsilon') - \varepsilon_0$ ihre aus den zwei ersten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Werte substituiert. Ebendieselbe Formel dient auch zur Berechnung von EG. Setzt man nämlich $HG = a^{(2)}$, $EG = b^{(2)}$, so ergeben sich aus den Gleichungen (34) die entsprechenden für $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b^{(2)} + a^{(2)})$ und $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b^{(2)} - a^{(2)})$, indem man auf der rechten Seite von (34) den Größen ε' und ψ ihre für $t = t_2$ gültigen Werte E_0HG und ΥH beilegt, dagegen die zur Bestimmung der Lage von EE_1 zu EE_0 dienenden Winkel π und Π ungeändert läßt. Der Bogen $EG = b^{(2)}$ folgt demnach unmittelbar aus (91), indem man das in dieser Gleichung explicite vorkommende, von der Entwicklung der Größen $\pi \sin \Pi$ und $\pi \cos \Pi$ herrührende $t = t_1$ setzt, aber für ψ und $\Delta\varepsilon$ ihre aus den beiden ersten der Gleichungen (96) folgenden, für $t = t_2$ gültigen Werte substituiert. Wenn also der aus (91) durch die Substitution $t = t_1$ erhaltene Wert von b mit $\varphi(t)$ bezeichnet wird und demnach

$$\begin{aligned}\varphi(t) = 180° - \Pi + \psi + 12''31\, t_1 + 0''453\, t_1^2 + [6.71873 - 10]\, t_1 \psi + \\ + [6_n2132 - 10]\, t_1 \Delta\varepsilon + [3_n5185 - 10]\, t_1^2 \psi + [5_n4747 - 10]\, t_1 \psi^2\end{aligned}$$

ist, wo ψ und $\Delta\varepsilon$ Funktionen von t sind, so hat man $EG = \varphi(t_2) = \varphi(t_1 + \tau)$ und $E\Upsilon_1 = \varphi(t_1)$; folglich ergibt sich $\Upsilon_1 G = \varphi(t_1) - \varphi(t_1 + \tau)$. Bezeichnet man nun $\Upsilon_1 G$ mit $(-\psi)_\tau$, und bedeuten $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1$, .. die für $t = t_1$ gültigen Werte der Differentialquotienten von $\varphi(t)$, so wird

$$(-\psi)_\tau = -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1 \tau - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1 \tau^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right)_1 \tau^3.$$

Aus der Gleichung für $\varphi(t)$ folgt aber mit Vernachlässigung sehr kleiner Glieder

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1 = \{1 + [6.71873]\,t_1 + [3_n 5185]\,t_1^2\}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 + [5_n 7757]\,t_1\,\psi_1\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1 = (1 + [6.719]\,t_1)\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_1 + [5_n 776]\,t_1\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1^2$$

$$\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right)_1 = \left(\frac{d^3\psi}{dt^3}\right)_1,$$

wo die für $t = t_1$ gültigen Werte von ψ und seiner Differentialquotienten mittels der ersten der Gleichungen (96) zu berechnen sind. Durch Substitution der Werte der Differentialquotienten von φ in die Gleichung für $(-\psi)_\tau$ erhält man schließlich

(100)
$$(-\psi)_\tau = (5036''95 + 0''494\,t_1 - 0''001\,t_1^2)\,\tau - (1''071 + 0''003\,t_1)\,\tau^2 - 0''002\,\tau^3.$$

Die Differenz $A_2GE - A_1\Upsilon_1E$ (Fig. 9) stellt die lunisolare Präzession der Schiefe der Ekliptik in der Zeit $t_2 - t_1$ bezogen auf die der Epoche $1850 + t_1$ entsprechende Ekliptik dar. Um den Winkel $A_1\Upsilon_1E$ zu erhalten, hat man in der Gleichung (41) $t = t_1$ zu setzen und auch für ψ und ε' ihre aus den beiden ersten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Werte zu substituieren. Mit Hülfe einer ganz ähnlichen Schlußweise, wie sie vorhin bei der Berechnung des Bogens EG aus der Gleichung (91) angewandt wurde, ergibt sich ferner, daß man den Winkel A_2GE aus (41) erhält, wenn das in dieser letzteren Gleichung explicite vorkommende $t = t_1$ gesetzt wird und für ψ und ε' ihre aus den zwei ersten der Gleichungen (96) für $t = t_2$ sich ergebenden Werte eingeführt werden. Setzt man also

$$\varepsilon' + q_1\,t_1 + q_2\,t_1^2 + p_1\,t_1\,\psi + p_2\,t_1^2\,\psi - \frac{1}{2}\,q_1\,t_1\,\psi^2 = \chi(t),$$

wo ε' und ψ Funktionen von t sind, so ist $A_2GE - A_1\Upsilon_1E = \chi\,(t_1 + \tau) - \chi(t_1)$. Man setze nun

$$A_2GE - A_1\Upsilon_1E = (\Delta\,\varepsilon)_\tau$$

und kennzeichne die für $t = t_1$ gültigen Werte der Differentialquotienten von χ durch den angehängten Index 1; es wird dann

$$(\Delta\,\varepsilon)_\tau = \left(\frac{d\chi}{dt}\right)_1\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\chi}{dt^2}\right)_1\tau^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\chi}{dt^3}\right)_1\tau^3.$$

Aus der Gleichung für $\chi(t)$ folgt aber mit Übergehung unbedeutender Glieder

$$\left(\frac{d\chi}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)_1 + (p_1\,t_1 + p_2\,t_1^2)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 - q_1\,t_1\,\psi_1\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1$$

$$\left(\frac{d^2\chi}{dt^2}\right)_1 = \left(\frac{d^2\varepsilon'}{dt^2}\right)_1 - q_1\,t_1\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1^2$$

$$\left(\frac{d^3\chi}{dt^3}\right)_1 = \left(\frac{d^3\varepsilon'}{dt^3}\right)_1.$$

Die Differentialquotienten von ψ und ε' sind durch die zwei ersten Gleichungen (96) bestimmt; mit Rücksicht auf eine später abzuleitende Formel soll aber an Stelle der zweiten der Gleichungen (96) die aus (76), (79), (87) und (88) mit Berücksichtigung der vierten Dezimale folgende

$$(\varepsilon') = \varepsilon_0 + 0''.0652\, t^2 - 0''.0078\, t^3$$

angewandt werden. Man erhält dann

(101) $$(\Delta\varepsilon)_\tau = (0''.0652 - 0''.0094\, t_1)\,\tau^2 - 0''.0078\,\tau^3 .$$

Da $(\Delta\varepsilon)_\tau$ der Definition nach gleich $A_2GE - A_1\Upsilon_1E$ ist und $A_1\Upsilon_1E$ den aus der vierten der Gleichungen 96) für $t = t_1$ folgenden Wert von (ε) bedeutet, so ergibt sich, wenn der Winkel A_2GE mit $(\varepsilon')_\tau$ bezeichnet wird,

(102) $$(\varepsilon')_\tau = \varepsilon_0 - 46''.838\, t_1 - 0''.009\, t_1^2 + 0''.001\, t_1^3$$
$$+ (0''.065 - 0''.009\, t_1)\,\tau^2 - 0''.008\,\tau^3 .$$

Der Bogen $G\Upsilon_2 = H\Upsilon_2 - HG$ (Fig. 8) stellt die Präzession durch die Planeten in dem Zeitintervall $t_2 - t_1$ bezogen auf den Äquator zur Zeit $1850 + t_2$ dar. $H\Upsilon_2$ folgt aus (94), wenn das in dieser Gleichung explicite auftretende $t = t_2$ gesetzt wird, und auch für ψ und $\Delta\varepsilon = (\varepsilon') - \varepsilon_0$ ihre aus den zwei ersten der Gleichungen (96) für $t = t_2$ folgenden Werte ψ_2 und $\Delta\varepsilon_2$ substituiert werden. Um HG zu erhalten, hat man in (94) wiederum $\psi = \psi_2$, $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_2$, dagegen das explicite vorkommende $t = t_1$ zu setzen. Wenn also der aus (94) für $\psi = \psi_2$, $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_2$ folgende Wert von a mit $F(t)$ bezeichnet wird, und demnach

$$F(t) = 13''.417\, t + 0''.493\, t^2 + [6.75619 - 10]\, t\psi_2 + [6_n1758 - 10]\, t\,\Delta\varepsilon_2 +$$
$$+ [3_n5873 - 10]\, t^2\psi_2 + [5_n5122 - 10]\, t\psi^2$$

ist, so folgt

$$G\Upsilon_2 = F(t_1 + \tau) - F(t_1) = \left(\frac{dF}{dt}\right)_1 \tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dt^2}\right)_1 \tau^2 .$$

Hiebei genügt es

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 = 13''.417 + 0''.986\, t_1 + [6.75619]\,\psi_2 +$$
$$+ [3_n8883]\, t_1\,\psi_2 + [5_n5122]\,\psi_2^2$$
$$\left(\frac{d^2F}{dt^2}\right)_1 = 0''.986 + [3_n8883]\,\psi_2$$

zu setzen. Ferner hat man

$$\psi_2 = \psi_1 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 \tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_1 \tau^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\psi}{dt^3}\right)_1 \tau^3,$$

also mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (96) und mit Vernachlässigung sehr kleiner Glieder

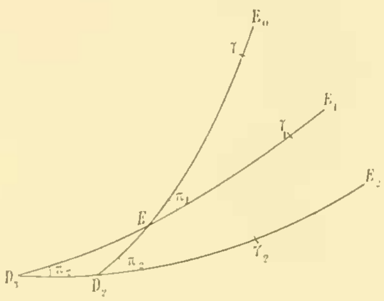
$$\psi_2 = -5036''.95\, t_1 + 1''.071\, t_1^2 - 5036''.95\,\tau + 2''.142\, t_1\tau + 1''.071\,\tau^2$$
$$\psi_2^2 = +123''.0\, t_1^2 + 246''.0\, t_1\tau + 123''.0\,\tau^2.$$

Wird der Bogen $G\Upsilon_2$ mit $(a)_\tau$ bezeichnet, so erhält man schließlich

(103) $$(a)_\tau = (13''.417 - 1''.887 t_1)\tau - (2''.380 + 0''.001 t_1)\,\tau^2 - 0''.001\,\tau^3.$$

In Fig. 10 werde die Lage der Ekliptik zu den Zeiten 1850, $1850+t_1$, $1850+t_2$ durch die größten Kreise D_2E_0, D_3E_1, D_3E_2 dargestellt; $\Upsilon, \Upsilon_1, \Upsilon_2$ mögen die bezüglichen mittleren Äquinoktien bedeuten. Mit Hülfe der Gleichungen (97) läßt sich die Länge des aufsteigenden Knotens Π der Ekliptik zur Zeit $1850+t$ auf der Ekliptik EE_0 von dem mittleren Äquinox Υ aus gerechnet, und der Winkel π zwischen

Fig. 10.



EE_0 und EE_1 bestimmen. Es soll nun die Länge des aufsteigenden Knotens $\Pi_\tau = 180° - D_3\Upsilon_1$ der Ekliptik zur Zeit $1850+t_2$ auf der Ekliptik EE_1, gerechnet von Υ_1 aus, und der Winkel $E_1 D_3 E_2 = \pi_\tau$ gesucht werden. Es ist $D_3\Upsilon_1 = D_3E + E\Upsilon_1$. Bezeichnet man die aus den Gleichungen (97) für $t = t_1$ beziehungsweise $t = t_2$ folgenden Werte von Π und π mit Π_1, π_1 beziehungsweise Π_2, π_2, so ist in dem Dreieck D_3ED_2 die Seite $ED_2 = \Pi_1 - \Pi_2$, der Winkel bei D_2 gleich $180° - \pi_2$, und der Winkel bei E gleich π_1. Somit hat man, wenn der sin mit dem Bogen vertauscht wird,

$$D_3 E = \frac{\pi_2}{\pi_\tau}(\Pi_1 - \Pi_2).$$

Ferner folgt aus einer der Napier'schen Analogien

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi_\tau = \frac{\cos\frac{1}{2}(D_3 E - D_3 D_2)}{\cos\frac{1}{2}(D_3 E + D_3 D_2)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\pi_2 - \pi_1)$$

oder hinreichend genau

$$\pi_\tau = \pi_2 - \pi_1.$$

Demnach wird

$$D_3 E = \frac{\pi_2}{\pi_2 - \pi_1}(\Pi_1 - \Pi_2) = \Pi_1 - \Pi_2 + \frac{\pi_1}{\pi_2 - \pi_1}(\Pi_1 - \Pi_2).$$

Den Gleichungen (97) zufolge ist aber, wenn $t_2 - t_1 = \tau$ gesetzt wird,

$$\Pi_1 - \Pi_2 = (869''0 + 0''14\, t_1)\tau + 0''07\,\tau^2$$
$$\pi_2 - \pi_1 = (47''142 - 0''068\, t_1)\tau - 0''034\,\tau^2.$$

Folglich erhält man

$$D_3 E = 869''0\, t_1 + 0''77\, t_1^2 + $$
$$+ (869''0 + 0''84\, t_1)\tau + 0''07\,\tau^2.$$

Bedeutet ferner $(\Lambda)_1$ den aus der dritten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Wert von (Λ), so ist

$$E\Upsilon - E\Upsilon_1 = (\Lambda)_1;$$

da aber $E\Upsilon = 180 - \Pi_1$ ist, so wird

$$E\Upsilon_1 = 180 - \Pi_1 - (\Lambda)_1.$$

Es ergibt sich also

$$\Pi_\tau = 180° - D_3 E - E\Upsilon_1 = \Pi_1 + (\Lambda)_1 - D_3 E,$$

oder nach Substitution der Werte von Π_1, $(\Lambda)_1$ und $D_3 E$

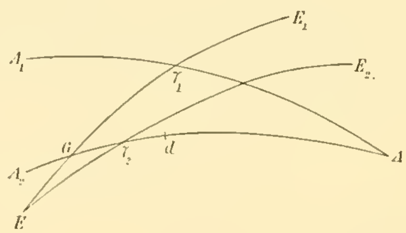
$$\Pi_\tau = 173° 29' 40''7 + 3286''6\, t_1 + 0''27\, t_1^2 -$$

(104) $$- (869''0 + 0''84\, t_1)\tau - 0''07\,\tau^2$$

$$\pi_\tau = (47''142 - 0''068\, t_1)\tau - 0''034\,\tau^2.$$

Hiermit sind die gesuchten den Gleichungen (96) und (97) entsprechenden Formeln gefunden. Es sollen jetzt noch einige andere abgeleitet werden, welche für die Reduktion der Beobachtungen ebenfalls von Wichtigkeit sind. In Fig. 11 mögen EE_1 und EE_2 die Ekliptik für $1850 + t_1$ beziehungsweise für

Fig. 11.



$1850 + t_2$, und AA_1 und AA_2 die entsprechende Lage des mittleren Äquators darstellen. Man setze mit Rücksicht darauf, daß $\Upsilon_1 A$ und GA nur wenig von 90° abweichen, $\Upsilon_1 A = 90° - p$, $GA = 90° - q$, ferner $\Upsilon_1 G = l'$, $A_1 A A_2 = n$, $E_1 \Upsilon_1 A = \varepsilon$, $E_1 G A = \varepsilon + \Delta\varepsilon$; es sind dann l' und $\Delta\varepsilon$ mit den durch die Gleichungen (100) und (101) bestimmten Größen $(-\psi)_\tau$ und $(\Delta\varepsilon)_\tau$ bezüglich identisch, während unter ε der aus der vierten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgende Wert von (ε) zu verstehen ist. Aus dem Dreiecke $AG\Upsilon_1$ folgt nun

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q) = \frac{\cos\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon\right)}{\cos\frac{1}{2}\Delta\varepsilon}\operatorname{tang}\frac{1}{2}l' =$$

$$= \cos\varepsilon \operatorname{tang}\frac{1}{2}l' - \sin\varepsilon \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Delta\varepsilon \operatorname{tang}\frac{1}{2}l'.$$

Da

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}l' = \frac{1}{2}l' + \frac{1}{24}l'^3, \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Delta\varepsilon \operatorname{tang}\frac{1}{2}l' = \frac{1}{4}\Delta\varepsilon\, l'$$

gesetzt werden kann, so wird

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q) = \frac{1}{2}l'\cos\varepsilon + \frac{1}{24}l'^3\cos\varepsilon - \frac{1}{4}\Delta\varepsilon\, l'\sin\varepsilon.$$

Man hat aber hinreichend genau

$$\frac{1}{2}(p-q) = \text{tang}\,\frac{1}{2}(p-q) - \frac{1}{3}\,\text{tang}^3\,\frac{1}{2}(p-q) =$$

$$= \text{tang}\,\frac{1}{2}(p-q) - \frac{1}{24}\,l'^3\cos^3\varepsilon.$$

Mit Rücksicht auf die vorige Gleichung erhält man demnach

(105) $$p-q = l'\cos\varepsilon - \frac{1}{2}\Delta\varepsilon\, l'\sin\varepsilon + \frac{1}{12}\,l'^3\cos\varepsilon\sin^2\varepsilon.$$

Trägt man jetzt auf AA_2 von A aus den Bogen $Ad = A\Upsilon_1$ ab, so ist $\Upsilon_2 d$ gleich dem Bogen, um den sich das Frühlingsäquinox Υ_1 innerhalb der Zeit $t_2 - t_1 = \tau$ auf dem der Epoche $1850 + t_2$ entsprechenden Äquator bewegt hat. Da $G\Upsilon_2$ gleich dem durch die Gleichung (103) bestimmten Bogen $(a)_\tau$ ist, so hat man wenn $\Upsilon_2 d$ mit m bezeichnet wird,

(106) $$m = p - q - (a)_\tau$$

Ferner erhält man aus dem Dreiecke $AG\Upsilon_1$

$$\sin\frac{1}{2}n\cos\frac{1}{2}(p+q) = \sin\frac{1}{2}l'\sin\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon\right)$$

oder, da $p+q$, wie sich gleich zeigen wird, sehr klein ist und demnach

$$\cos\frac{1}{2}(p+q) = 1$$

$$\sin\frac{1}{2}l' = \frac{1}{2}l' - \frac{1}{48}l'^3$$

$$\sin\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon\right) = \sin\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon\cos\varepsilon$$

gesetzt werden kann,

$$\sin\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}l'\sin\varepsilon + \frac{1}{4}l'\Delta\varepsilon\cos\varepsilon - \frac{1}{48}l'^3\sin\varepsilon.$$

Nun ist

$$\frac{1}{2}n = \sin\frac{1}{2}n + \frac{1}{6}\sin^3\frac{1}{2}n = \sin\frac{1}{2}n + \frac{1}{48}l'^3\sin^3\varepsilon,$$

somit ergibt sich

(107) $$n = l'\sin\varepsilon + \frac{1}{2}l'\Delta\varepsilon\cos\varepsilon - \frac{1}{24}l'^3\sin\varepsilon\cos^2\varepsilon.$$

Endlich folgt aus dem Dreiecke $AG\Upsilon_1$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(p+q) = -\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\varepsilon}{\sin\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon\right)}\cot\!g\,\frac{1}{2}l' =$$

$$= -\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\Delta\varepsilon}{\left(\sin\varepsilon + \text{tang}\,\frac{1}{2}\Delta\varepsilon\cos\varepsilon\right)\text{tang}\,\frac{1}{2}l'}$$

Es ist aber $\Delta\varepsilon$ sehr klein im Verhältnis zu l' und folglich auch $(p+q)$ ein kleiner Winkel; demnach erhält man aus der vorigen Gleichung, wenn noch tang $\frac{1}{2} l' = \frac{1}{2} l'$ gesetzt wird,

$$p + q = -\frac{2\Delta\varepsilon}{l' \sin\varepsilon}$$

oder, mit Berücksichtigung von (107),

$$(108) \qquad p + q = -\frac{2\Delta\varepsilon}{n}$$

In den Gleichungen (105) und (107) ist der vierten der Gleichungen (96) zufolge

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - 46''838\, t_1 - 0''009\, t_1^2 + 0''001\, t_1^3$$

und demnach

$$\sin\varepsilon = \sin\varepsilon_0 + [6_n 35617]\, t_1 \cos\varepsilon_0 = [9.599981] + [6_n 31870]\, t_1$$

$$\cos\varepsilon = \cos\varepsilon_0 + [6.35617]\, t_1 \sin\varepsilon_0 = [9.962533] + [5.95615]\, t_1$$

zu setzen, wo die in Klammern stehenden Zahlen Logarithmen bedeuten, deren Numeri in Teilen des Radius ausgedrückt sind. Führt man ferner an Stelle von l' und $\Delta\varepsilon$ die durch die Gleichungen (100) und (101) bestimmten Werte von $(-\psi)_\tau$, beziehungsweise $(\Delta\varepsilon)_\tau$ ein, und substituiert für $(a)_\tau$ seinen Wert (103), so erhält man aus den Gleichungen (105) bis 108)

$$(109) \qquad \begin{aligned} p - q &= (4620''63 + 0''908\, t_1 - 0''001\, t_1^2)\,\tau - (0''982 + 0''003\, t_1)\,\tau^2 + 0''035\,\tau^3 \\ m &= (4607''21 + 2''795\, t_1 - 0''001\, t_1^2)\,\tau + (1''398 - 0''002\, t_1)\,\tau^2 + 0''036\,\tau^3 \\ n &= (2005''16 - 0''852\, t_1)\,\tau - (0''426 + 0''001\, t_1)\,\tau^2 - 0''042\,\tau^3 \\ p + q &= -(13''41 - 1''93\, t_1)\,\tau + 1''60\,\tau^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt noch

$$(110) \qquad \begin{aligned} p &= +(2303''61 + 1''42\, t_1)\,\tau + 0''31\,\tau^2 \\ q &= -(2317''02 - 0''51\, t_1)\,\tau + 1''29\,\tau^2. \end{aligned}$$

In den Formeln (98) bis (110) bedeutet t_1 die von 1850.0 bis zur neuen Anfangsepoche $1850 + t_1$, und τ die von $1850 + t_1$ bis $1850 + t_2$ verflossene Zeit, ausgedrückt in julianischen Jahrhunderten. Will man aber das tropische Jahr als Zeiteinheit wählen, so ist zu berücksichtigen, daß die Länge desselben allerdings veränderlich ist, aber nur in so geringem Grade, daß man für die Zeit von 1750 bis 1950 unbedenklich ein julianisches Jahr = 0.9999786 tropisches Jahr annehmen kann; man hat also die Koeffizienten von t_1 und von τ mit $\frac{0.9999786}{100}$ zu multiplizieren, die Koeffizienten von t_1^2 und $t_1\tau$ mit $\left(\frac{0.9999786}{100}\right)^2$, u. s. w. Bedeutet ferner t_0 die vorhin mit $1850 + t_1$ bezeichnete neue Anfangsepoche und t die Epoche, für welche man die Werte der auf der linken Seite der Formeln (98) bis (110) stehenden Unbekannten sucht, so ist in den genannten Formeln $t_0 - 1850$ statt t_1 und $t - t_0$ statt τ zu setzen, wo nun $t_0 - 1850$ und $t - t_0$ als in tropischen Jahren ausgedrückt zu denken sind. Für das Resultat der Rechnung ist es aber gleichgültig, ob die Gleichungen (98) bis (110) in der eben angegebenen oder in folgender Weise geändert werden: Man multipliziere die Koeffizienten von t_1 und τ mit 0.9999786, diejenigen von t_1^2 und $t_1\tau$ mit $(0.9999786)^2, \ldots$ und ersetze t_1 durch $\frac{t_0 - 1850}{100}$ und τ durch $\frac{t - t_0}{100}$.

Auf diese Art ergeben sich die folgenden für das tropische Jahr als Zeiteinheit gültigen Formeln:

$$(-\psi)_\tau = \left[5036''84 + 0''494\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''001\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2\right]\frac{t-t_0}{100}$$

$$-\left[1''071 + 0''003\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 - 0''002\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$(\varepsilon')_\tau = 23°\,27'\,31''68 - 46''837\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''009\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2 + 0''001\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^3$$

$$+\left[0''065 - 0''009\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 - 0''008\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$(\Lambda)_\tau = \left[5024''53 + 2''224\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''003\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2\right]\frac{t-t_0}{100}$$

$$+\left[1''112 - 0''003\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 - 0''001\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$(\varepsilon)_\tau = 23°\,27'\,31''68 - 46''837\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''009\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2 + 0''001\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^3$$

$$-\left[46''837 + 0''018\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''003\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2\right]\frac{t-t_0}{100}$$

$$-\left[0''009 - 0''003\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + 0''001\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$(a)_\tau = \left[13''417 - 1''887\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - \left[2''380 + 0''001\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 - 0''001\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$\pi_\tau = \left[47''141 - 0''068\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - 0''034\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$\Pi_\tau = 173°\,29'\,40''7 + 3286''5\,\frac{t_0-1850}{100} + 0''27\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2 -$$

$$-\left[869''0 + 0''84\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - 0''07\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$p-q = \left[4620''53 + 0''908\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''001\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2\right]\frac{t-t_0}{100}$$

$$-\left[0''982 + 0''003\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + 0''035\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$m = \left[4607''11 + 2''795\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''001\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2\right]\frac{t-t_0}{100}$$

$$+\left[1''398 - 0''002\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + 0''036\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$n = \left[2005''12 - 0''852\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - \left[0''426 + 0''001\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 - 0''042\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$p+q=-\left[13''41-1''93\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100}+1''60\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$p=+\left[2303.56+1''42\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100}+0''31\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$q=-\left[2316''97-0''51\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100}+1''29\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

10. Durch die Gleichungen (89) und (90) ist die Bewegung der Rotationsaxe der Erde in Bezug auf die der Epoche 1850.0 entsprechende Ebene der Ekliptik bestimmt; es sollen nun die analogen für die kleine Axe der Erde gültigen Gleichungen abgeleitet werden. Dieselben ergeben sich durch Integration der Differentialgleichungen (25), doch ist zuvor der in letzteren vorkommende Quotient $\frac{A}{C}$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke läßt sich die auf p. 426 gefundene Gleichung

$$\log\frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}=8.22751-10$$

benutzen. Wenn T die Umlaufszeit der Erde in ihrer Bahn und E die Masse der Erde in Teilen der Sonnenmasse $M_\odot$ darstellt, so ist bekanntlich

$$k^2=\frac{4\pi^2\Delta^3}{T^2\,(1+E)\,M_\odot}.$$

Gauss nimmt $E=1:354710$ und die Umlaufszeit der Erde gleich 365.2563835 mittlere Sonnentage an. Da wir als Zeiteinheit das julianische Jahrhundert gewählt haben, so ist

$$T=\frac{365.2563835}{36525}$$

zu setzen; es ergibt sich dann

$$\log\frac{k^2M_\odot}{\Delta^3}=\log\frac{4\pi^2}{T^2(1+E)}=5.59634.$$

n bedeutet die auf die kleine Achse der Erde bezogene Komponente der Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Würde man den Sterntag als Zeiteinheit festsetzen, so wäre $n=2\pi$; da aber das julianische Jahrhundert als Zeiteinheit gewählt wurde, so erhält man, wenn f das Verhältnis eines mittleren Sonnentages zum Sterntag angibt, $n=2\pi f.36525$. Nun ist $\log f=0.0011874$, somit wird

$$\log n=5.36196.$$

Mit Hülfe der im vorigen bestimmten Werte ergibt sich

$$\frac{C-A}{C}=0.00328,\qquad (\log=7.51601-10),$$

also

$$\frac{A}{C}=0.99672,\qquad (\log=9.99857-10).$$

Was nun die Differentialgleichungen (25) betrifft, so kann man bei jeder von ihnen das letzte Glied auf der rechten Seite vernachlässigen; denn das größte derselben, nämlich $\frac{A}{Cn}\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ in der Gleichung für $\frac{d\psi}{dt}$, gibt integriert (wenn $\varepsilon'=\varepsilon_0$, $\frac{d\psi}{dt}=5037''$ gesetzt wird) nur $0''0004\,t$. Die Gleichungen werden demnach

$$\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt} = -\frac{L}{Cn}-\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{M}{Cn}+\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right),$$

oder, wenn man auf die Gleichungen (26^a) Rücksicht nimmt und $\sin\varepsilon_1'=\sin\varepsilon'$ setzt,

(111)
$$\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt} = \sin\varepsilon'\frac{d\psi_1}{dt}-\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon_1'}{dt}+\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right).$$

Hierin sind ψ_1 und ε_1' mit den durch die Gleichungen (89) und (90) bestimmten Integralen ψ und ε' der Gleichungen (26^a) identisch.[1] Setzt man jetzt

(112)
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi_1}{dt}+\frac{d\delta\psi_1}{dt}$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon_1'}{dt}+\frac{d\delta\varepsilon_1'}{dt},$$

so erhält man aus (111) die folgenden simultanen Differentialgleichungen

(113)
$$\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta\varepsilon_1'}{dt}\right)+\sin\varepsilon'\frac{d\delta\psi_1}{dt} = -\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon_1'}{dt}\right)$$

$$\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\delta\psi_1}{dt}\right)-\frac{d\delta\varepsilon_1'}{dt} = -\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi_1}{dt}\right).$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich nach der Methode der Variation der Konstanten integrieren. Wenn nämlich die rechten Seiten gleich 0 wären, so würde man als Integrale erhalten

(114)
$$\sin\varepsilon'\frac{d\delta\psi_1}{dt} = m\sin\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)$$

$$\frac{d\delta\varepsilon_1'}{dt} = m\cos\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right),$$

wo m und σ zwei Konstanten bedeuten. Betrachtet man aber m und σ als veränderlich, so lassen sich $m\sin\sigma$, $m\cos\sigma$ so bestimmen, daß die Gleichungen (114) auch den Differentialgleichungen (113) Genüge leisten. Nach Substitution dieser Werte in die Gleichungen (114) erhält man durch Integration die Werte

---

[1] Vergl. p. 401, Z. 13.

von $\delta\psi_1$ und $\delta\varepsilon_1'$, welche zu ψ_1 beziehungsweise ε_1' addiert die Integrale der Differentialgleichungen (25) darstellen. Einfacher aber ist der folgende Weg: Aus den Gleichungen (111) erhält man, wenn

$$\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)+\frac{\operatorname{cotg}\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$$

gesetzt und von den Integrationskonstanten abgesehen wird,

$$\psi=\psi_1-\frac{A}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}$$

$$\varepsilon'=\varepsilon_1'+\frac{A}{Cn}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right),$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (112) und (114),

$$-\psi=-\psi_1+\frac{A}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon_1'}{dt}+\frac{Am}{Cn\sin\varepsilon'}\cos\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)$$

$$\varepsilon'=\varepsilon_1'+\frac{A}{Cn}\sin\varepsilon'\frac{d\psi_1}{dt}+\frac{Am}{Cn}\sin\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right).$$

Aus den Gleichungen (89) und (90) folgt aber mit Vernachlässigung aller für das Folgende bedeutungslosen Glieder

$$\frac{d\varepsilon_1'}{dt}=-0\rlap{.}''552\sin 2L\frac{d2L}{dt}-0\rlap{.}''088\sin 2c\frac{d2c}{dt}-0\rlap{.}''011\sin[2c+g]\frac{d[2c+g]}{dt}-$$
$$-9\rlap{.}''210\sin\Omega\frac{d\Omega}{dt}-0\rlap{.}''018\sin[2c-\Omega]\frac{d[2c-\Omega]}{dt}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt}=-5036\rlap{.}''95+1\rlap{.}''271\cos 2L\frac{d2L}{dt}+0\rlap{.}''204\cos 2c\frac{d2c}{dt}+0\rlap{.}''026\cos[2c+g]\frac{d[2c+g]}{dt}+$$
$$+17\rlap{.}''224\cos\Omega\frac{d\Omega}{dt}+0\rlap{.}''034\cos[2c-\Omega]\frac{d[2c-\Omega]}{dt}.$$

In den Gleichungen (89) und (90) ist das julianische Jahrhundert als Zeiteinheit gewählt worden; es bedeuten also in den vorigen Differentialgleichungen $\frac{d\,2L}{dt}, \frac{d\,2c}{dt}, \ldots\ldots$ die in Teilen des Radius ausgedrückten Werte der mittleren Bewegung von $2L$, $2c$, ... in einem julianischen Jahrhundert. Auf p. 423 sind die Produkte aus diesen Werten und arc 1″ mitgeteilt; dividiert man dieselben durch arc 1″, so ergeben sich die folgenden hier anzuwendenden Werte der Differentialquotienten beziehungsweise ihrer Logarithmen

$$\log\frac{d\,2L}{dt}=3.0992 \qquad \log\frac{d\Omega}{dt}=1_n5284$$

$$\text{»}\ \frac{d\,2c}{dt}=4.2253 \qquad \text{»}\ \frac{d[2c-\Omega]}{dt}=4.2262$$

$$\text{»}\ \frac{d[2c+g]}{dt}=4.4002\,.$$

Ferner folgt unter Anwendung der auf p. 52 gegebenen Werte von $A:C$ und n, wenn $\sin\varepsilon' = \sin\varepsilon_0$ gesetzt wird,

$$\log\frac{A}{Cn\sin\varepsilon'} = 5.0366-10, \qquad \log\frac{A}{Cn}\sin\varepsilon' = 4.2366-10.$$

Somit erhält man als vollständige Integrale der Differentialgleichungen (111) beziehungsweise (25)

$$-\psi = -\psi_1 - 0''008\sin 2L - 0''016\sin 2c - 0''003\sin[2c+g] + 0''003\sin\Omega -$$

$$- 0''003\sin[2c-\Omega] + \frac{Am}{Cn\sin\varepsilon'}\cos\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)$$

(115)

$$\varepsilon' = \varepsilon_1' - 0''009 + 0''003\cos 2L + 0''006\cos 2c + 0''001\cos[2c+g] - 0''001\cos\Omega +$$

$$+ 0''001\cos[2c-\Omega] + \frac{Am}{Cn}\sin\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right),$$

wo m und σ die Integrationskonstanten bezeichnen. Die Periode der beiden von $\frac{Cn}{A}t-\sigma$ abhängigen Glieder ist gleich $2\pi\frac{A}{Cn}$. Nimmt man den Sterntag als Einheit, so ist $n = 2\pi$; die Periode ist also gleich $0.99672 = \frac{305}{306}$ Sterntage.

Die Werte von m und σ sind durch die Beobachtungen zu bestimmen; in welcher Weise dies geschehen kann, soll jetzt gezeigt werden. Es sei (Fig. 12[a]) Z der Pol der festen Ekliptik NX, und X der

Fig. 12 a.

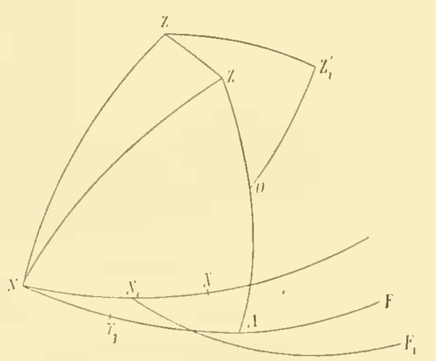
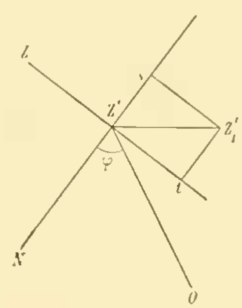


Fig. 12 b.



zugehörige Frühlings-Tag- und Nachtgleichepunkt. Z' sei der Punkt, in dem die verlängerte kleine Achse der Erde die Sphäre trifft und NF der größte Kreis, in dem die zur kleinen Achse der Erde senkrechte Ebene die Himmelskugel schneidet. Ferner sei Z_1' der instantane Drehungspol der Erde und N_1F_1 der zur Rotationsachse senkrechte instantane Äquator. Es ist dann $ZZ' = \varepsilon'$, $ZZ_1' = \varepsilon_1'$, $NX = -\psi$, $N_1X = -\psi_1$, also NN_1 und somit auch der Winkel $Z'ZZ_1' = \psi_1-\psi$. Wenn endlich $Z'OA$ den Meridian eines Beobachtungsortes O darstellt, so ist $NZ'A$ der früher (p. 7) mit φ bezeichnete Winkel. Es werde jetzt in dem Punkte Z' (Fig. 12[b]) eine Tangentialebene an die Sphäre gelegt, und $Z'N$, $Z'Z$, $Z'Z_1'$, $Z'O$ mögen die Tangenten an die in Fig. 12[a] in derselben Weise bezeichneten größten Kreise darstellen. Die Koordinaten von Z_1' in Bezug auf die zu einander senkrechten Achsen $NZ's$, $ZZ't$ sind dann

$$Z's = (\psi_1-\psi)\sin\varepsilon', \qquad Z't = \varepsilon_1'-\varepsilon'.$$

Wird nun in Fig. 12[a] der Bogen OZ' mit $90°-\Phi$ und der Bogen OZ_1' mit $90°-\Phi'$ bezeichnet, so ist die Differenz $OZ'-OZ_1'$ oder $\Phi'-\Phi$ gleich der Projektion von $Z'Z_1'$ (Fig. 12[b]) auf die Tangente $Z'O$; man erhält also

$$\Phi'-\Phi = -(\psi_1-\psi)\sin\varepsilon'\cos\varphi + (\varepsilon_1'-\varepsilon')\sin\varphi$$

oder mit Einsetzung der durch die Gleichungen (115) bestimmten Werte von $\psi_1-\psi$ und $\varepsilon_1'-\varepsilon'$

(116) $$\Phi'-\Phi = -\frac{Am}{Cn}\cos\left(\frac{Cn}{A}t-\varphi-\sigma\right) + 0\text{"}009\sin\varphi - 0\text{"}006\sin(\varphi-2c) - 0\text{"}003\sin(\varphi-2L) -$$
$$-0\text{"}001\sin(\varphi-2c-g) + 0\text{"}001\sin(\varphi-\Omega) - 0\text{"}001\sin(\varphi-2c+\Omega).$$

In dieser Gleichung kommt noch die Unbekannte φ vor. Es sei Υ_1 (Fig. 12[a]) der aufsteigende Knoten der beweglichen, der Epoche $1850+t$ entsprechenden Ekliptik auf dem derselben Epoche angehörigen beweglichen Äquator NF; es ist dann der Winkel $NZ'\Upsilon_1$ gleich dem durch die Gleichung (95) bekannten Bogen a. Ferner gibt der Winkel $\Upsilon_1 Z'A$ die Sternzeit des Ortes an; wird diese mit Θ bezeichnet, so ist $\varphi = \Theta + a$. Aus der dritten der Gleichungen (18) in Verbindung mit (24) folgt jetzt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(\Theta+a)}{dt} = n - \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon',$$

also, wenn φ_0 eine Konstante bezeichnet,

$$\varphi = \Theta + a = \varphi_0 + nt - \int\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'\,dt.$$

Das auf der rechten Seite vorkommende Integral ist verschwindend klein gegenüber nt. Setzt man nämlich $\cos\varepsilon' = \cos\varepsilon_0$ und berücksichtigt von ψ nur das größte Glied $-5036\text{"}9\,t$, so wird das Integral gleich $-5036\text{"}9\,t\cos\varepsilon_0 = -4620\text{"}6\,t$, wo die Einheit von t das julianische Jahrhundert ist. Würde man also den Sterntag als Zeiteinheit wählen, so wäre $\int\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon' dt = -0\text{"}13t$, während dann $n = 1296000''$ anzunehmen ist. Für den hier in Betracht kommenden Fall kann man demnach $\varphi = \Theta + a = \varphi_0 + nt$ setzen. Zählt man ferner t von dem Augenblicke an, wo der Meridian $Z'A$ des Ortes O mit $Z'N$ zusammenfällt, so ist $\varphi_0 = 0$, also $\varphi = \Theta + a = nt$. Da a der Gleichung (95) zufolge selbst nach Ablauf eines Jahrhunderts nur rund eine Zeitsekunde beträgt, so hat man ausreichend genau

$$\varphi = \Theta = nt.$$

Setzt man nun in dem ersten Gliede auf der rechten Seite der Gleichung (116) $\varphi = nt$ und in den übrigen $\varphi = \Theta$, so wird

(117) $$\Phi'-\Phi = -\frac{Am}{Cn}\cos\left(\frac{C-A}{A}nt-\sigma\right) + 0\text{"}009\sin\Theta \quad 0\text{"}006\sin[\Theta-2c] - 0\text{"}003\sin[\Theta-2L] -$$
$$-0\text{"}001\sin[\Theta-2c-g] + 0\text{"}001\sin[\Theta-\Omega] - 0\text{"}001\sin[\Theta-2c+\Omega].$$

Aus dem oben angegebenen Verhältnis $C-A : C$ folgt

$$\frac{C-A}{A} = 0.00329, \qquad (\log = 7.51744-10).$$

Da, wenn der Sterntag als Zeiteinheit gewählt wird, $n = 2\pi$ zu setzen ist, so ist die Periode des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (117) gleich 303.8 Sterntage = 303.0 mittlere Tage. Φ' bedeutet die

beobachtete Polhöhe und Φ die geographische Breite oder das Komplement des Winkels zwischen der kleinen Achse der Erde und der Vertikalen. Da Φ für die als starr vorausgesetzte Erde konstant ist, so müßten, wenn

$$\Phi' + 0\rlap{.}''009 \sin\Theta + 0\rlap{.}''006 \sin[\Theta - 2c] + \ldots + 0\rlap{.}''001 \sin[\Theta - 2c + \Omega] = \Phi'' \tag{118}$$

gesetzt wird, die Werte von Φ'' eine zehnmonatliche Periode zeigen, und man könnte also aus Beobachtungsreihen, die sich über diesen Zeitraum ausdehnen, mittelst der Gleichung

$$\Phi'' = \Phi - \frac{Am}{Cn}\cos\left(\frac{C-A}{A}nt - \sigma\right) \tag{119}$$

die Werte von $m \sin\sigma$ und $m \cos\sigma$ ableiten.

Die Gleichungen (89) und (90) stellen die Integrale der Gleichungen (26^a) dar und letztere unterscheiden sich von den strengen Differentialgleichungen (26) nur dadurch, daß die Glieder

$$\frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

bezüglich

$$-\frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\cos\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt}$$

vernachlässigt worden sind. Betrachtet man zunächst das erste Glied jedes dieser beiden Aggregate, so würde man als Zusatzglieder zu den Integralen (89) und (90) erhalten

$$\frac{C-A}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}, \qquad -\frac{C-A}{Cn}\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}.$$

Substituiert man hierin die aus den Gleichungen (112) und (114) folgenden Werte von $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ und $\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}$, so ergibt sich, daß selbst wenn der aus den beobachteten Polhöhen mit Hülfe von (119) berechnete Koeffizient $\frac{Am}{Cn} = 0\rlap{.}''1$ wäre, das durch (89) gegebene ψ nur die Korrektion $0\rlap{.}''0008 \cos\left(\frac{Cn}{A}t - \sigma\right)$ und das durch (90) bestimmte ε' die Korrektion $0\rlap{.}''0003 \sin\left(\frac{Cn}{A}t - \sigma\right)$ erfordern würde. Der Beitrag, den die von $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ und $\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon}{dt}$ abhängigen Glieder geben, ist noch viel geringer. Es beschreibt also freilich auch die Rotationsachse im Laufe eines (genauer 0.9967) Sterntages einen kleinen Kreis um ihre mittlere Lage, aber der Radius dieses Kreises ist so minimal, daß man die Drehungsachse, wenn man von den durch die Gleichungen (89) und (90) bestimmten Änderungen ihrer Lage absieht, als unbeweglich betrachten kann.

11. Aus den früher (p. 35 und 38) erhaltenen Gleichungen

$$\log\frac{3k^2 M_{\mathbb{C}}}{H^3}\frac{C-A}{Cn} = 8.56371$$

$$\log\frac{3k^2 M_{\odot}}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn} = 8.22751$$

folgt noch

$$\frac{M_\text{☾}}{M_\odot}\frac{\Delta^3}{H^3} = \text{Num}\, 0.33620.$$

Bezeichnet man die in Einheiten der Erdmasse ausgedrückten Massen von Mond und Sonne mit M, beziehungsweise M' und ihre mittleren Bewegungen mit μ, beziehungsweise μ', so ist

$$\mu^2 H^3 = k^2 (1 + M)$$

$$\mu'^2 \Delta^3 = k^2 (1 + M')$$

und

$$\frac{M_\text{☾}}{M_\odot} = \frac{M}{M'}.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{M\,(1 + M')}{M'\,(1 + M)}\frac{\mu^2}{\mu'^2} = \frac{M}{1 + M}\left(1 + \frac{1}{M'}\right)\frac{\mu^2}{\mu'^2} = \text{Num}\, 0.33620.$$

Da $\frac{\mu}{\mu'} = \text{Num}\, 1.12610$ und $M' > 300000$ ist, so folgt

$$M = \frac{1}{81.4}.$$